浙江科技学院学报,第16卷第3期,2004年9月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 3, Sep. 2004

强 S-完全正则与强 S-完全正规空间

艾为鸿

(浙江科技学院 理学系,浙江 杭州 310023)

摘 要:引入强 S_i- 空间($i=0,1,2,3,4$)、强 S- 完全正则(强 $S_{3.5}$)与强 S- 完全正规(强 S_5)空间的概念,着重研究强 S- 完全正规(强 $S_{3.5}$)与强 S- 完全正则(强 S_5)空间的特征性质,得到一些有趣的结果。

关键词:强半开集;强 S- 空间($i=0,1,2,3,4$);强 S- 完全正则(正规)空间;次连续映射

中图分类号:O189.11　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2004)03-0149-04

文献[1]利用半开集提出了 S_i- 空间($i=0,1,2,3,4$)的概念。文献[2]对 S_i- 空间的等价刻画及 S_i- 空间成为 T_i- 空间的条件进行了初步探讨。文献[3]是文献[2]的继续,引入了 S- 完全正则($S_{3.5}$)与 S- 完全正规(S_5)空间的定义,研究了它们的特征性质。本文利用强半开集[4]定义了强 S_i- 空间($i=0,1,2,3,4$)、强 S- 完全正则(强 $S_{3.5}$)与强 S- 完全正规(强 S_5)空间,着重研究强 S- 完全正则(强 $S_{3.5}$)与强 S- 完全正规(强 S_5)空间的特征性质及与其他强 S_i- 空间的相互联系。对强 S_i- 空间($i=0,1,2,3,4$)的讨论,另文给出。

定义 1　设 X 是拓扑空间,用 $\mathscr{T}$ 与 $\mathscr{F}$ 分别表示 X 的开集族与闭集族,$A,B\subset X$。

(1) 若存在 $O\in\mathscr{T}$ 使 $O\subset A\subset O^-$,则称 A 为半开集[5]。简记 $SO(X)$ 表示 X 的半开集族。

(2) 若存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $F^\circ\subset B\subset F$,则称 B 为半闭集[6]。简记 $SC(X)$ 表示 X 的半闭集族。

定义 2　设 A,B 是拓扑空间 X 中的子集。

(1) 若存在 $O\in\mathscr{T}$ 使 $O\subset A\subset O^{-\circ}$,则称 A 是强半开集[4]。简记 $SSO(X)$ 表示 X 的强半开集族。

(2) 若存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $F^{\circ-}\subset B\subset F$,则称 B 是强半闭集[4]。简记 $SSC(X)$ 表示 X 的强半闭集族。

命题 1[4]　设 X 是拓扑空间,则

(1) $\mathscr{T}\subset SSO(X)\subset SO(X)$。

(2) $\mathscr{F}\subset SSC(X)\subset SC(X)$。

定义 3　设 X 是拓扑空间。

(1) 若 $\forall\, x,y\in X, x\neq y$,存在 $U\in SSO(X)$,使 $x\in U, y\notin U$,或 $y\in U, x\notin U$,则称 X 为强 S_0 空间。

(2) 若 $\forall\, x,y\in X, x\neq y$,存在 $U_1,U_2\in SSO(X)$,使 $x\in U_1, y\in U_2$,且 $x\notin U_2, y\notin U_1$,则称 X 为强 S_1 空间。

(3) 若 $\forall\, x,y\in X, x\neq y$,存在 $U_1,U_2\in SSO(X)$,使 $x\in U_1, y\in U_2$, $U_1\cap U_2=\varnothing$,则称 X 为强 S_2 空间。

(4) 若 $\forall\, x\in X, \forall\, F\in\mathscr{F}, x\notin F$,存在 $U_1,U_2\in SSO(X)$,使 $x\in U_1, F\subset U_2$, $U_1\cap U_2=\varnothing$,则称 X 为强 S- 正则空间。

T_1 的强 S- 正则空间称为强 S_3 空间。

收稿日期:2004-02-13

作者简介:艾为鸿(1947—　),男,江西高安人,教授,主要从事基础数学的教学及格与拓扑的研究。

(5) 若 $\forall F_1, F_2 \in \mathscr{F}, F_1 \cap F_2 = \varnothing$，存在 $U_1, U_2 \in SSO(X)$，使 $F_1 \subset U_1, F_2 \subset U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$，则称 X 为强 S- 正规空间。

T_1 的强 S- 正规空间称为强 S_4 空间。

定理1 下列蕴涵关系式成立：

$$\begin{array}{ccccccccc}
T_4 \Rightarrow & & T_3 \Rightarrow & & T_2 \Rightarrow & & T_1 \Rightarrow & & T_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{强 } S_4 \Rightarrow & & \text{强 } S_3 \Rightarrow & & \text{强 } S_2 \Rightarrow & & \text{强 } S_1 \Rightarrow & & \text{强 } S_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
S_4 \Rightarrow & & S_3 \Rightarrow & & S_2 \Rightarrow & & S_1 \Rightarrow & & S_0
\end{array}$$

证明 由定义3和 S_i 空间[7] 的定义、T_i 空间[7] 的定义，以及命题1(1) 立即可得。

定义4 设 $(Y, \mathscr{T}_X)$ 与 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 是两个拓扑空间，$f: X \to Y$。

(1) 若 $\forall U \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X$，则称 f 是连续映射[7]。

(2) 若 $\forall U \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in SSO(X)$，则称 f 是次连续映射。

(3) 若 $\forall U \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in SO(X)$，则称 f 是弱连续映射[3]。

由定义4及命题1(1) 不难得出：

命题2 连续映射 $\Rightarrow$ 次连续映射 $\Rightarrow$ 弱连续映射。

定义5 设 X 是拓扑空间。

(1) 若 $\forall x \in X, \forall B \in \mathscr{F}, x \notin B$，总存在连续映射 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x) = 0$ 且 $\forall y \in B, f(y) = 1$，则称 X 为完全正则空间[8]。

T_1 的完全正则空间称为 $T_{3.5}$ 空间[8]。

(2) 若 $\forall x \in X, \forall B \in \mathscr{F}, x \notin B$，总存在次连续映射 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x) = 0$ 且 $\forall y \in B, f(y) = 1$，则称 X 为强 S- 完全正则空间。

T_1 的强 S- 完全正则空间称为强 $S_{3.5}$ 空间。

(3) 若 $\forall x \in X, \forall B \in \mathscr{F}, x \notin B$，总存在弱连续映射 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x) = 0$ 且 $\forall y \in B, f(y) = 1$，则称 X 为 S- 完全正则空间[3]。

T_1 的 S- 完全正则空间称为 $S_{3.5}$ 空间[3]。

定理2[8] $T_5 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3.5} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$。

定理3[3] $S_5 \Rightarrow S_4 \Rightarrow S_{3.5} \Rightarrow S_3 \Rightarrow S_2 \Rightarrow S_1 \Rightarrow S_0$。

定理4 下列蕴涵关系式成立：

$$\begin{array}{ccc}
T_{3.5} \Rightarrow & \text{强 } S_{3.5} \Rightarrow & S_{3.5} \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
\text{完全正则} \Rightarrow & \text{强 } S\text{- 完全正则} \Rightarrow & S\text{- 完全正则}
\end{array}$$

证明 由定义5及命题2可得。

定义6 设 X 是拓扑空间。

(1) 若对于任意 X 的隔离子集 A, B，总存在 $U, V \in \mathscr{T}$ 使 $A \subset U, B \subset V$，且 $U \cap V = \varnothing$，则称 X 为完全正规空间[8]。

T_1 的完全正规空间称为 T_5 空间[8]。

(2) 若对于任意 X 的隔离子集 A, B，总存在 $U, V \in SSO(X)$ 使 $A \subset U, B \subset V$，且 $U \cap V = \varnothing$，则称 X 为强 S- 完全正规空间。

T_1 的强 S- 完全正规空间称为强 S_5 空间。

(3) 若对于任意 X 的隔离子集 A, B，总存在 $U, V \in SO(X)$ 使 $A \subset U, B \subset V$，且 $U \cap V = \varnothing$，则称 X 为 S- 完全正规空间[3]。

T_1 的 S- 完全正规空间称为 S_5 空间[3]。

定理 5　下列蕴涵关系式成立:

$$\begin{array}{ccccc} T_5 \Rightarrow & & \text{强 } S_5 \Rightarrow & & S_5 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{完全正规} \Rightarrow & & \text{强 } S\text{- 完全正规} \Rightarrow & & S\text{- 完全正规} \end{array}$$

证明　由定义 6 及命题 1(1) 可得。

定理 6　强 S- 完全正则 $\Rightarrow$ 强 S- 正则。

证明　设 X 为强 S- 完全正则空间,由定义 5(2),$\forall\, x \in X, \forall\, B \in \mathscr{F}, x \notin B$,则必存在次连续映射 f: $X \to [0,1]$,使 $f(x) = 0$ 且 $\forall\, y \in B, f(y) = 1$。因$[0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1]$是$[0,1]$中的两个不相交的开集,$0 \in [0,\frac{1}{2}), 1 \in (\frac{1}{2},1]$,又 f 为次连续映射,则 $f^{-1}([0,\frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2},1]) \in SSO(X), x \in f^{-1}([0,\frac{1}{2})), B \subset f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ 且 $f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2},1]) = \varnothing$。由定义 3(4),$X$ 为强 S- 正则空间。

推论 1　强 $S_{3.5} \Rightarrow S_3$。

定理 7　强 S- 完全正规 $\Rightarrow$ 强 S- 正规。

证明　设 X 是强 S- 完全正规空间,$\forall\, A,B \in \mathscr{F}, A \cap B = \varnothing$,则 A,B 是 X 的隔离子集。由定义 6(2) 总存在 $U,V \in SSO(X)$ 使 $A \subset U, B \subset V$ 且 $U \cap V = \varnothing$。由定义 3(5),X 为强 S- 正规空间。

推论 2　强 $S_5 \Rightarrow$ 强 S_4。

定理 8　拓扑空间 X 为强 S- 正规空间当且仅当 $\forall\, A,B \in \mathscr{F}, A \cap B = \varnothing$,存在次连续映射 $f: X \to [0,1]$,使得 $x \in A$ 时 $f(x) = 0$, $y \in B$ 时,$f(y) = 1$。

证明　充分性。若 A,B 为 X 的任意两个不相交的闭集,则必有次连续映射 $f: X \to [0,1]$,使得当 $x \in A$ 时 $f(x) = 0$,当 $y \in B$ 时 $f(y) = 1$。由于$[0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1]$是$[0,1]$中的两个不相交的开集,$f$ 为次连续映射,故 $U = f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$、$V = f^{-1}((\frac{1}{2},1]) \in SSO(X)$,且 $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \varnothing$,从而 X 为强 S- 正则空间。

必要性。仿文献[7]中定理 6.3.1 可得,只需要注意把强半开集与开集,次连续映射与连续映射对应。

推论 3　强 $S_4 \Rightarrow$ 强 $S_{3.5}$。

定理 9　强 $S_5 \Rightarrow$ 强 $S_4 \Rightarrow$ 强 $S_{3.5} \Rightarrow$ 强 $S_3 \Rightarrow$ 强 $S_2 \Rightarrow$ 强 $S_1 \Rightarrow$ 强 S_0。

证明　由定理 1 及推论 1、推论 2、推论 3 可得。

命题 3[3]　设 X 是拓扑空间,$\forall\, B \subset X, \forall\, A \in \mathscr{T}$,则 $A \cap B^- \subset (A \cap B)^-$。

命题 4　设 X 是拓扑空间,Y 是 X 的开子空间,则 $\forall\, A \in SSO(x) \Rightarrow A \cap Y \in SSO(Y)$。

证明　设 $A \in SSO(X)$,则存在 $U \in \mathscr{T}$,使 $U \subset A \subset (U \cap Y)^{-0}$。从而由命题 3 有 $U \cap Y \subset A \cap Y \subset U^{-0} \cap Y = U^{-0} \cap Y^0 = (U^- \cap Y)^0 \subset (U \cap Y)^{-0}$,其中 $U \cap Y \in \mathscr{T}_Y$,故 $A \cap Y \in SSO(Y)$。

命题 5　设 $f: X \to Z$ 是次连续映射,Y 是 X 的开子空间,则 $g = f|_Y: Y \to Z$ 也是次连续映射。

证明　$\forall\, U \in \mathscr{T}_Z$,因 f 是次连续映射,则 $f^{-1}(U) \in SSO(X)$。由于 Y 是 X 的开子空间,依据命题 4 得 $g^{-1}(U) = (f|_Y)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Y \in SSO(Y)$,故 $g = f|_Y: Y \to Z$ 也是次连续映射。

定理 10　强 S- 正则、强 S_3 对于开子空间都是可遗传的性质。

证明　设 X 是强 S- 正则空间,Y 是 X 的任一开子空间。$\forall\, y \in Y, \forall\, B \in \mathscr{F}_Y, y \notin B$,则 $y \in X$ 且存在 $A \in \mathscr{F}$ 使 $B = A \cap Y$,易知 $y \notin A$。因 X 为强 S- 正则空间,则有 $U,V \in SSO(X)$,使 $y \in U, A \subset V$,且 $U \cap V = \varnothing$。令 $U_1 = U \cap Y, V_1 = V \cap Y$,由命题 4 知,$U_1, V_1 \in SSO(Y), y \in U_1, B = A \cap Y \subset V \cap Y = V_1$,且 $U_1 \cap V_1 = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \varnothing$。于是 Y 是强 S- 正则空间。

若 X 为强 S_3 空间,即 T_1 的强 S- 正则空间。注意到 T_1 为可遗传的性质,当然对开子空间可遗传,则 X 的

任一开子空间也是 T_1 的强 S- 正则空间。即 Y 也是强 S_3 空间。

定理 11 强 S- 完全正则、强 $S_{3.5}$ 对于开子空间都是可遗传的性质。

证明 仿定理 11 的证明可得。

定理 12 若 x,y 是强 $S_{3.5}$ 空间中不同的两点，则存在次连续映射 $f:X \to R$，使得 $f(x) \neq f(y)$。

证明 设 X 为强 $S_{3.5}$ 空间，即 T_1 的强 S- 完全正则空间，$x,y \in X$，$x \neq y$。因 T_1 空间中的单点集 $\{y\}$ 是闭集，而 $x \notin \{y\}$，由定义 5(2)，必存在次连续映射 $f:X \to [0,1]$，使 $f(x)=0$，$f(y)=1$。此处的 f 即为 X 到 R 的次连续映射，且 $f(x) \neq f(y)$。

定理 14 下列蕴涵关系成立：

$$
\begin{array}{ccccccc}
T_5 \Rightarrow & T_4 \Rightarrow & T_{3.5} \Rightarrow & T_3 \Rightarrow & T_2 \Rightarrow & T_1 \Rightarrow & T_0 \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
\text{强 } S_5 \Rightarrow & \text{强 } S_4 \Rightarrow & \text{强 } S_{3.5} \Rightarrow & \text{强 } S_3 \Rightarrow & \text{强 } S_2 \Rightarrow & \text{强 } S_1 \Rightarrow & \text{强 } S_0 \\
\Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
S_5 \Rightarrow & S_4 \Rightarrow & S_{3.5} \Rightarrow & S_3 \Rightarrow & S_2 \Rightarrow & S_1 \Rightarrow & S_0
\end{array}
$$

证明 由定理 1、定理 2、定理 3、定理 4、定理 5、定理 9 和推论 1、推论 2、推论 3 可得。

参考文献：

[1] 胡庆平. S-分离性[J]. 数学研究与评论，1984，4(3)：7－12.

[2] 艾为鸿. 关于 S_i-空间的分离性[J]. 黑龙江大学自然科学学报，1991，8(2)：32－34，41.

[3] 艾为鸿. S-完全正则与 S-完全正规空间[J]. 抚州师专学报，2001，20(3)：5－7.

[4] 艾为鸿. 拓扑空间中的强半开集[J]. 江西教育学院学报，2003，24(3)：8－10.

[5] Levine N. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces[J]. Amer Math Monthly，1963，70：36－41.

[6] Crossley S，Hildebrand K. Semi-closure[J]. Texas J Sci，1971，22(2+3)：99－112.

[7] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 第二版，北京：高等教育出版社，1988. 151－180.

[8] 王曾贻，葛 诚. 拓扑空间[M]. 乌鲁木齐：新疆大学出版社，2000. 69－102.

[9] Engelking R. General Topologic[M]. Warszaw：Panstwowe Wydawnictwo Naukowe，1977. 57－73.

Strong S-completely regular and strong S-completely normal spaces

AI Wei-hong

(Dept. of Science，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China)

Abstract: In this paper，the concepts of strong S_i-topological spaces ($i=0,1,2,3,4$)，strong S-completely regular (strong $S_{3.5}$) and strong S-completely normal (strong S_5) spaces are introduced. Characteristic properties of strong S-completely regular (strong $S_{3.5}$) and strong S-completely normal (strong S_5) spaces are discussed emphatically. Some interesting results are obtained.

Key words: strong semi-open set；strong S_i-topological spaces；strong S-completely regular(normal) spaces；subcontinuity mapping