浙江科技学院学报，第16卷第4期，2004年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 4, Dec. 2004

平凡纽结分解的个数

陶志雄
（浙江科技学院 理学系，浙江 杭州 310023）

摘　要：分解一个有 n 个二重点的 universe 的每个二重点可以得到 2^n 个纽结，文章通过构造的方法给出了这 2^n 个纽结中平凡纽结个数的下界。

关键词：universe；分解；纽结
中图分类号：O189.24　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2004)04-0226-02

确认一个纽结是否为平凡纽结一直是人们所感兴趣的问题[1,2]。给了一个有 n 个二重点的 universe，分解其所有的二重点可以得到 2^n 个纽结，如果它是一个素的(prime) universe，则有下述定理：分解一个素的具有 n 个二重点的 universe，至少可得到 $2n$ 个为平凡纽结的不同分解。

1　定　义

universe K 是定向的 S^1 到 S^2 或 $\mathbb{R}^2$ 的浸入像[3]，且其所有的二重点都是横截的(transverse)。设 K 是一个 universe，x 是它的一个二重点，代替 x 以正交叉称为 x 的正分解和代替 x 以负交叉称为 x 的负分解。

如上分解每个二重点可得此 universe 的 2^n 个可能的分解即 2^n 纽结，每个纽结称为 K 的一个分解。如果一条简单闭曲线 C 交 K 于两点 P 和 Q。K 中从 P 到 Q 的弧添加上一段连接 Q，P 的弧得到一个 universe K_1。同样，由剩下的弧可得另一个 universe K_2，这样的 K 称为 K_1 与 K_2 的和记作 $K=K_1 \oplus K_2$，K_1 与 K_2 称为 K 的因子。如果 K_1 和 K_2 中总有一个是平凡的(即为简单闭曲线)，则说 K 是素的。图1是三个 universe 和的例子，其中较细的闭曲线即为上面所述的两个不同的 C。一个分解若是平凡纽结则称其为平凡纽结分解。

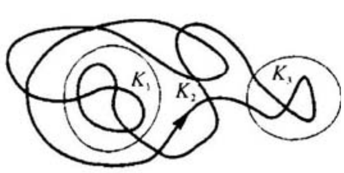

图1　一个 *universe* 的例子

2　创建平凡纽结分解

在 universe K 上任选一点 p，使其不是二重点。从 p 点出发沿着定向行进，遇到二重点，则分解它使得行进方式是越过下面的弧，如此不断直至回到 p 点。此时已分解了所有的二重点或者说已得到一个纽结 K^p，不难知道它是平凡的[3]。图2显示了这一做法。

3　定理的证明

记号如图3所示，在 K 上取定一个弧段中点为 a_1，然后从该点出发，沿着相反于 K 的定向分别用 a_i 表示 K 上两个相邻二重点的中点($i=2,\cdots,2n$)以及用 d_r 表示 K 的二重点，$r=1,2,\cdots,n$，而且 $\{a_i\}$ 与 $\{d_r\}$ 的下标数字随 K 反方向递增。此外，仍用 d_r 标示二重点 d_r 分解后的交叉。根据上面创建平凡纽结分解的方法，可

收稿日期：2004-05-17
基金项目：浙江省教育厅科研基金资助项目(20010448)
作者简介：陶志雄(1961—　)，男，浙江绍兴人，博士，副教授，主要从事拓扑学的研究。

知有 $2n$ 个平凡纽结分解 $\{K^{a_i}\}$。它们是互不相同的 K 的分解。因为若 $K^{a_s}, K^{a_t}, 1 \leqslant s < t \leqslant 2n$ 是相同的，记 d_r 是 a_s 与 a_{s+1} 间的那个唯一的二重点，它将 K 分成了两个弧段，则 K 不外乎有两种可能（如图 3 所示），即 a_s 和 a_t 在不同的上述弧段即情形 1，否则为情形 2。

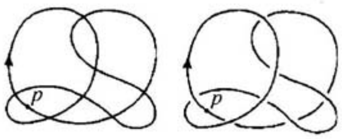

图 2　创建平凡纽结的例子

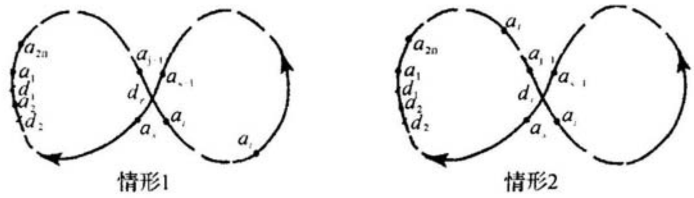

图 3　K 的两种情形

情形 1，由于在 K^{a_s} 中 d_r 是负交叉，而在 K^{a_t} 中 d_r 是正交叉，故它们不可能相同。

情形 2，设 A 是沿着 K 的定向从 a_s 到 a_t 的弧（不含端点），余下的弧记为 B。分解 K 后仍用 A 和 B 记这些弧。由于 K 是素的，故 $A \cap B \neq \varnothing$（否则就有过 a_s, a_t 的简单闭曲线）。设 $d \in A \cap B$，则 d 是 K 的二重点，且 d 分解后在 K^{a_s} 和在 K^{a_t} 中是有不同符号的两个交叉。事实上，从 a_s 出发按 K 的定向沿着 A 行进，首先遇到 d，然后是 a_t，这样 K^{a_s} 中在 d 处的弧 A 在弧 B 之上；若从 a_t 出发按 K 的定向沿着 B 行进，则首先遇到 d，然后是 a_s，于是 K^{a_t} 中在 d 处的弧 B 在弧 A 之上。因此也为不可能。

综上可得定理真。

推论　设 universe K 是 m 个非平凡的素 universe $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 的和，L_i 有 s_i 个二重点 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则 K 至少有 $2^m s_1 s_2 \cdots s_m$ 个不同的平凡纽结分解。

4　例　子

假设 universe K 及记号如图 4(a)，它有 2^3 个分解。记一个二重点的正（负）分解为 $+1(-1)$。这样就给出了 K 的分解集到集合 $\mathscr{B} = \{(p,q,r) \in R^3\} \mid |p| = |q| = |r| = 1\}$ 的 $1-1$ 对应，例如 a_1, a_2, a_3 分别分解为正的、负的、负的交叉对应于 $\mathscr{B}$ 中元 $(+1, -1, -1)$。清楚地，$\mathscr{B}$ 正是表示了方体 $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in R^3 \mid \max\{|x|, |y|, |z|\} \leqslant 1\}$ 的所有顶点。而且两个顶点有一条方体的边相连接的充要条件是对应的分解仅相差一个交叉。具体如图 4(b) 所示，其中 3_1 指三叶结（trefoil），$3_1!$ 是它的镜面像。这个图直观且清楚地说明了对于一般情形定理所给出的下界是最佳的。

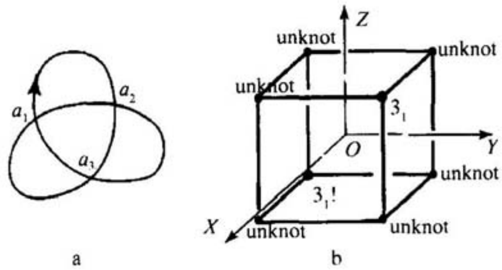

图 4　一个 universe 的所有分解

参考文献：

[1] Birman J S, Hirsch M D. A new algorithm for recognizing the unknot[J]. Geometry and Topology, 1998, 2: 175-220.

[2] Birman J S, Boldi P, Rampichini M, *et al*. Towards an implementation of the B-H algorithm for recognizing the unknot [J]. Journal of Knot Theory, 2002, 11(4): 601-645.

[3] Kauffman L H. On Knots[M]. Princeton N J: Princeton Univ Press, 1987.

Number of unknot resolutions

TAO Zhi-xiong

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: 2^n knots can be obtained by resolving each double point of a universe with n double points. Using the method of constructing unknot, this paper gives the least number of unknot resolutions.

Key words: universe; resolution; knot