

带 GARCH 误差项非线性 ESTAR 模型的单位根检验

胡俊娟,王 伟

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 探讨带 GARCH 误差项 ESTAR 模型的单位根检验。将 KSS 型检验统计量表示成自标准化部分和的形式,从而推导出在有均值和无均值 2 种情况下该统计量的渐进分布。通过蒙特卡罗模拟,对误差项为 GARCH 过程和独立同分布的情况进行了临界值比较,进一步通过模拟发现在非线性平稳 ESTAR-GARCH 模型下,KSS 型统计量比常规的 DF 统计量具有更高的势。

关键词: 单位根;KSS 型统计量;ESTAR;渐进分布

中图分类号: O212;F222

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2018)01-0008-08

Testing for unit root in nonlinear ESTAR model with GARCH errors

HU Junjuan, WANG Wei

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: The unit root test for ESTAR model with GARCH errors is conducted. The KSS-type test statistics are rewritten in the form of self-normalized partial sums, and thus the asymptotic distributions of the test statistics are derived with zero mean and nonzero mean respectively. Moreover, through Monte Carlo simulation the asymptotic distributions are compared with those obtained under independent identical distribution (i. i. d.) errors, and furthermore, the KSS-type statistics are found to have better power than that of the standard Dickey-Fuller test under the alternative non-linear stationary ESTAR-GARCH model.

Keywords: unit root; KSS-type statistics; ESTAR; asymptotic distribution

近年来,非线性模型受到了国内外研究者的广泛关注^[1-3]。然而,对线性模型的单位根检验已经不适用于非线性 STAR 模型。因此,许多研究者对指数 STAR(ESTAR)模型进行了探讨。Kapetanios 等^[4]

收稿日期: 2017-09-08

基金项目: 浙江省教育厅科研计划项目(Y201635430)

通信作者: 胡俊娟(1979—),女,浙江省兰溪人,讲师,博士,主要从事时间序列分析研究。E-mail:hujunjuan@163.com。

提出了 Dickey-Fuller 型 KSS 检验统计量; Kruse^[5] 在位置参数取值任意的情况下, 用修正的 Wald 统计量对 ESTAR 模型进行了研究; Hanck^[6] 修正了 Kapetanios 等提出的 KSS 检验统计量在带趋势项情况下的极限分布。张凌翔等^[7] 讨论了局部随机游走 STAR 模型、局部随机趋势 STAR 模型的线性检验问题, 构造了 Wald 类检验统计量, 提出了在局部平稳性未知的条件下进行 STAR 模型的线性检验方法。在实际研究中, 经济变量的波动在不同时期通常具有时变性和波动集群性, 因此非线性 STAR-GARCH 模型在现实中有着很重要的应用^[8]。近年来, 对带 GARCH 误差项模型的单位根检验引起了研究者的广泛关注, 参见 Ling 和 Li^[9]、Wang^[10]、Yuan 和 Zhang^[11] 等。这些研究主要针对 AR-GARCH 模型的单位根检验进行了研究, 然而针对 STAR-GARCH 模型的单位根检验, 却鲜有文献提及。由于非线性的 ESTAR-GARCH 过程和带 GARCH 的单位根过程数据表现非常相近, 为了有效地建立合适的模型, 在对数据建模前应对其进行单位根检验。因此, 对 ESTAR-GARCH 模型的单位根检验进行研究是必要的。我们拟采用 KSS 型检验统计量, 将其表示成自标准化的部分和形式, 从而推导出在有均值和无均值 2 种情况下该统计量的渐进分布。通过蒙特卡罗模拟验证了该统计量的检验效果, 并将该检验统计量与常规的 DF 检验统计量进行比较。

1 关于平稳 ESTAR 过程的单位根检验

对于时间序列, Kapetanios 等^{[4]361} 对一阶 ESTAR 模型(ESTAR(1))进行检验:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} G(y_{t-1}; \theta) + \epsilon_t, t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

式(1)中: 平滑转换函数 $G(y_{t-1}; \theta) = 1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}$; $\{\epsilon_t\}$ 独立同分布序列且均值为零, 方差为 σ_ϵ^2 ; T 为样本量; Δ 为差分算子。

1.1 Kapetanios 等关于平稳 ESTAR 模型的单位根检验

Kapetanios 等^{[4]361} 在原假设 $H_0: \theta = 0$, 备择假设 $H_1: \theta > 0$ 的情况下对模型进行单位根检验。他们证明了当 $|1 + \gamma| < 1$ (即 $\gamma \in (-2, 0)$) 时, ESTAR 模型是严平稳序列。针对模型(1), Kapetanios 等^{[4]363} 主要采用对平滑参数 θ 的检验来区别平稳 ESTAR 过程和单位根过程。当 θ 不为零时, 模型(1) 就为平稳 ESTAR 过程, 否则就是单位根过程。然而, 模型中 γ 为零时, 模型(1) 变成单位根过程。因此, 为了避免对未知参数 γ 进行估计, Luukkonen 等^[12] 对 $G(y_{t-1}; \theta) = 1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}$ 在 $\theta = 0$ 处进行一阶泰勒展开, 得到相应的辅助方程为:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \text{误差项}。$$

进一步, 为了解决误差项相关问题, Kapetanios 等^{[4]365} 通过增加 Δy_t 的滞后项来消除。即考虑以下 ESTAR(k) 模型:

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} G(y_{t-1}; \theta) + \sum_{j=1}^k \rho_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t. \quad (2)$$

式(2)中: $\{\epsilon_t\} \sim \text{i. i. d.}(0, \sigma_\epsilon^2)$ 。相应地, 对 $G(y_{t-1}; \theta) = 1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}$ 进行一阶泰勒展开, 从而得到辅助方程:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^k \rho_j \Delta y_{t-j} + \text{误差项}。 \quad (3)$$

对模型(2), Kapetanios 等^{[4]363} 基于式(3) 提出了 Dickey-Fuller 型 t 统计量进行单位根检验:

$$\text{KSS} = \frac{\hat{\delta}}{\text{s. e.}(\hat{\delta})}。 \quad (4)$$

式(4)中: $\hat{\delta}$ 为式(3) 中参数 δ 的 LS 估计量; $\text{s. e.}(\hat{\delta})$ 为 $\hat{\delta}$ 的标准差。原假设 $H_0: \theta = 0$ 变为 $H_0: \delta = 0$, 而备择假设为 $H_1: \delta < 0$ 。

1.2 关于 ESTAR-GARCH 模型的单位根检验

考虑以下带 GARCH 误差项的 ESTAR 模型(ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型):

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} (1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}) + \sum_{j=1}^k \rho_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t, \quad (5)$$

$$\epsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} e_t \text{ 且 } h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}. \quad (6)$$

式(6)中: $\omega > 0; \alpha_i \geq 0; \beta_j \geq 0; i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q; e_t$ 为独立同分布且均值为 0, 方差为 1 的序列。显然, 当所有的 α_i 和 β_j 为零时, ϵ_t 变成均值为零, 方差为常数的独立同分布序列。

对于上述的 ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型(式(5) ~ (6)), 通过对平滑转换函数的一阶泰勒展开, 得到相应的辅助方程为:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1}^3 + \sum_{j=1}^k \rho_j \Delta y_{t-j} + \text{误差项}. \quad (7)$$

相应地, 在 GARCH(p, q) 误差项情况下, 采用 KSS 型检验统计量来检验原假设 $H_0: \theta = 0$ (即检验 $H_0: \delta = 0$), 记为 τ :

$$\tau = \frac{\hat{\delta}}{\text{s. e.}(\hat{\delta})}. \quad (8)$$

式(8)中: $\hat{\delta}$ 为辅助方程式(7)中参数 δ 的最小二乘估计量; $\text{s. e.}(\hat{\delta})$ 为 $\hat{\delta}$ 的标准差。进一步, 考虑时间序列 y_t 是带有漂移项 u 的过程, 即:

$$y_t = u + y_t^*, \quad (9)$$

$$\Delta y_t^* = \gamma y_{t-1}^* (1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^{*2}\}) + \sum_{j=1}^k \rho_j \Delta y_{t-j}^* + \epsilon_t, \quad (10)$$

$$\epsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} e_t \text{ 且 } h_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}. \quad (11)$$

记 $\hat{\delta}_u$ 为相应辅助方程参数 δ 的最小二乘估计量, 则检验统计量为:

$$\tau_u = \frac{\hat{\delta}_u}{\text{s. e.}(\hat{\delta}_u)}.$$

接着讨论统计量 τ 和 τ_u 的渐进分布。为了考察 ESTAR-GARCH 模型, 不妨把 GARCH(p, q) 模型的严平稳性作为必要条件事先给定, 首先给出用于推导渐进分布的假设 1 和假设 2。

假设 1 $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ 且存在某个 $r \geq 3$ 使得 $E(e_t^{2r}) < \infty$ 。

假设 2 多项式 $\rho(z) = 1 - \rho_1 z - \dots - \rho_k z^k$ 满足 $\rho(z) = 0$ 的根在单位圆外。

在假设 1 成立的情况下, ϵ_t 是严平稳序列且二阶矩有界, 则有 $\sigma_\epsilon^2 = E(\epsilon_t^2) < \infty$ 。同时, 假设 1 保证了 ϵ_t 的六阶矩存在。在假设 2 成立的情况下, ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型(式(5) ~ (6)) 在原假设 $H_0: \theta = 0$ 下变成了差分平稳的 AR(k)-GARCH(p, q) 模型。

为了简便起见, 不妨记 $S_T = \sum_{t=1}^T \epsilon_t, V_T^2 = \sum_{t=1}^T \epsilon_t^2, s_T^2 = E(S_T^2) = E(V_T^2) = T\sigma_\epsilon^2$ 。 $\frac{S_{[Tr]}}{s_T}$ 被称为自标准化部分和(称 $\frac{S_T}{s_T}$ 为自标准化总和)^[13]。下文, $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数, $W(r)$ 表示定义在 $[0, 1]$ 上的标准布朗运动, \Rightarrow 表示在 Skorohod 拓扑中空间 $D[0, 1]$ 上的弱收敛。为了给出检验统计量的渐进分布, 首先给出引理 1:

引理 1 在假设 1 成立的情况下, 则

$$\frac{S_{[Tr]}}{s_T} \Rightarrow W(r).$$

证明: 根据文献[11] 的引理 5.1 和引理 5.2, 可以得出, 在假设 1 成立的条件下,

$$\frac{V_T^2}{s_T^2} \xrightarrow{\text{a. s.}} 1.$$

且对于任意的 $x > 0$,

$$\frac{1}{s_T^2} \sum_{t=1}^T E(\epsilon_t^2 I_{(|\epsilon_t| > xs_T}) \rightarrow 0, \text{ 当 } T \rightarrow \infty.$$

根据 Hall 等^[14] 的定理 4.1, 可以得到

$$\frac{S_{[Tr]}}{V_T} \Rightarrow W(r).$$

因为 $\frac{V_T^2}{s_T^2} \xrightarrow{\text{a.s.}} 1$, 所以有 $\frac{S_{[Tr]}}{s_T} \Rightarrow W(r)$ 。

得证。

关于统计量渐进分布的分析, 通常假设序列的初始值是常数或者是有界的变量。在 Müller 等^[15] 的启发下, 不妨假设序列 $\{y_t\}$ 的初始值是 $O_P(\sqrt{T})$ 。在该条件下, 初始值对统计量渐进分布的影响是可以忽略的。以下是我们得出的主要结论。

定理 1 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 考虑非线性 ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型 (式(5) ~ (6)), 统计量 τ 在原假设 $H_0: \theta = 0$ 下的渐进分布为:

$$\tau \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{B}}. \quad (12)$$

式(12) 中: $A = \int_0^1 W^3(r) dW(r)$ 且 $B = \int_0^1 W^6(r) dr$ 。

证明: 由于 $\hat{\delta}$ 是辅助方程式(7) 中参数 δ 的最小二乘估计, 通过简单的代数计算可以得到

$$\tau = \frac{\sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \epsilon_t}{\sqrt{\hat{\sigma}_\epsilon^2 \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6}} + O_P(1). \quad (13)$$

式(13) 中: $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ 为 σ_ϵ^2 的估计量。在 $H_0: \theta = 0$ 成立的情况下易证 $\hat{\sigma}_\epsilon^2 \xrightarrow{P} \sigma_\epsilon^2$ 。在下列证明过程中, y_0 可以是常数或者是有界的随机变量。为了方便起见, 不妨令 $y_0 = 0$ 。在原假设 $H_0: \theta = 0$ 条件下, ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型成为 AR(k)-GARCH(p, q) 模型。进一步, 在假设 2 成立的条件下, 令

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j z^j = \frac{1}{1 - \rho_1 z - \dots - \rho_k z^k}, \text{ 根据多项式分解定理}^{[16]}, \text{ 可以得到}$$

$$y_t = \varphi(1) \sum_{i=1}^t \epsilon_i + \eta_t - \eta_0. \quad (14)$$

式(14) 中: $\varphi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = \frac{1}{1 - \rho_1 - \dots - \rho_k}$; $\eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \epsilon_{t-j}$; $a_j = -\sum_{i=j+1}^{\infty} \varphi_i$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$ 。

进一步, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \epsilon_t &= \varphi^3(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i \right)^3 \epsilon_t + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (\eta_{t-1} - \eta_0)^3 \epsilon_t + \\ &3\varphi^2(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i \right)^2 \epsilon_t (\eta_{t-1} - \eta_0) + 3\varphi(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i \right) \epsilon_t (\eta_{t-1} - \eta_0)^2 = \\ &\varphi^3(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (S_{t-1})^3 \epsilon_t + \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (\eta_{t-1} - \eta_0)^3 \epsilon_t + \\ &3\varphi^2(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (S_{t-1})^2 \epsilon_t (\eta_{t-1} - \eta_0) + 3\varphi(1) \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T (S_{t-1}) \epsilon_t (\eta_{t-1} - \eta_0)^2 = \\ &Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \end{aligned}$$

因为 $E(\epsilon_t) = 0, \sigma_\epsilon^2 = E(\epsilon_t^2) < \infty, E(S_T^2) = T\sigma_\epsilon^2$, 通过遍历性定理^[17] 可以得出 Q_2, Q_3, Q_4 为 $O_P(1)$ 。

类似地, $\frac{1}{T^4} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_{t-1}}{\sqrt{T}} \right)^6 = \varphi^6(1) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{S_{t-1}}{\sqrt{T}} \right)^6 + O_P(1)$ 。

根据引理 1, 在假设 1 成立的情况下有 $\frac{S_{[Tr]}}{\sqrt{T}} \Rightarrow \sigma_\epsilon W(r)$ 。接下来, 把检验统计量 τ 写成自标准化部分和的形式。根据引理 1 和连续映射定理, 则统计量 τ 为:

$$\tau = \frac{\varphi^3(1) \sum_{t=1}^T \left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right)^3 \frac{\epsilon_t}{S_T}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon^2} \varphi^6(1) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right)^6}} + O_P(1) \Rightarrow \frac{\int_0^1 W^3(r) dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 W^6(r) dr}}。$$

定理 2 在假设 1 和假设 2 成立的条件下, 考虑非线性 ESTAR(k)-GARCH(p, q) 模型(式(9) ~ (11))($u \neq 0$), 统计量 τ_u 在原假设 $H_0: \theta = 0$ 条件下的渐进分布为:

$$\tau_u \Rightarrow \frac{C}{\sqrt{D}}。 \quad (15)$$

式(15) 中: $C = \int_0^1 (W^3(r) - 3W^2(r) \int_0^1 W(r) dr + 3W(r) \left(\int_0^1 W(r) dr \right)^2 - \left(\int_0^1 W(r) dr \right)^3) dW(r)$ 且 $D = \int_0^1 \left(W(r) - \int_0^1 W(r) dr \right)^6 dr$ 。

证明: 考虑序列去掉漂移项。在原假设 $H_0: \theta = 0$ 的条件下, 根据最小二乘法, 检验统计量为:

$$\tau_u = \frac{\sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \bar{y})^3 \epsilon_t}{\sqrt{\hat{\sigma}_\epsilon^2 \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \bar{y})^6}} + O_P(1)。 \quad (16)$$

式(16) 中: $\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t$ 。对带漂移项的模型而言, 用 $y_t - u$ 代替 y_t^* , 式(10) 与式(5) 等价。类似于定理 1 的证明, 可以得到

$$\tau_u = \frac{\sum_{t=1}^T \left(\left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right)^3 - 3 \left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right)^2 \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{S_t}{S_T} \right) + 3 \left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right) \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{S_t}{S_T} \right)^2 - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{S_t}{S_T} \right)^3 \right) \frac{\epsilon_t}{S_T}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{\sigma_\epsilon^2} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\left(\frac{S_{t-1}}{S_T} \right) - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{S_t}{S_T} \right) \right)^6}} + O_P(1)。$$

根据引理 1 和连续映射定理^[18], 则有

$$\tau_u \Rightarrow \frac{\int_0^1 (W^3(r) - 3W^2(r) \int_0^1 W(r) dr + 3W(r) \left(\int_0^1 W(r) dr \right)^2 - \left(\int_0^1 W(r) dr \right)^3) dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 \left(W(r) - \int_0^1 W(r) dr \right)^6 dr}}。$$

得证。

2 Monte Carlo 模拟

从上述检验统计量的渐进分布可以看出, 在单位根检验下, 该分布与模型中的参数无关。为此, 我们采用 Monte Carlo 随机模拟方法, 考察检验统计量 τ 和 τ_u 的检验效果。

首先考察以下几种不同的数据生成过程。数据生成过程设为:

$$y_t = y_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$\epsilon_t = h_t^{\frac{1}{2}} e_t \text{ 且 } h_t = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}。$$

其中: $\{e_t\} \sim \text{i. i. d.}(0, 1)$; $(\omega, \alpha_1, \beta_1) = \{(1, 0, 0), (0.1, 0.2, 0.7), (0.1, 0.1, 0.8), (0.1, 0.05, 0.9)\}$ 。这里考虑不同的 GARCH 模型系数(误差项 ϵ_t 是独立同分布和异方差情况)。为了考察不同情况统计量的渐进分布, 蒙特卡罗模拟过程的数据样本容量设为 1 000, 重复 50 000 次。从定理 1 和定理 2 可以看出, 检验统计量 τ 和 τ_u 的渐进分布与滞后项 k 无关, 即对模型(5) 和模型(10) 而言, 有无滞后项 k 都不会影响检验统计量的渐进分布。因此, 在这里主要关注没有滞后项的情况。考虑到统计量的渐进分布与误差项

GARCH 模型中 p, q 无关, 根据实际应用取 $p = q = 1$ 来进行讨论。图 1 给出了原始数据和去均值数据对应检验统计量 τ 和 τ_u 的经验累积分布。显然, 无论在误差项为独立同分布序列还是 GARCH 情况下, 检验统计量的渐进分布是一致的。相对而言, 带漂移项的情况下, 统计量的绝对临界值比无漂移项情况下稍大。

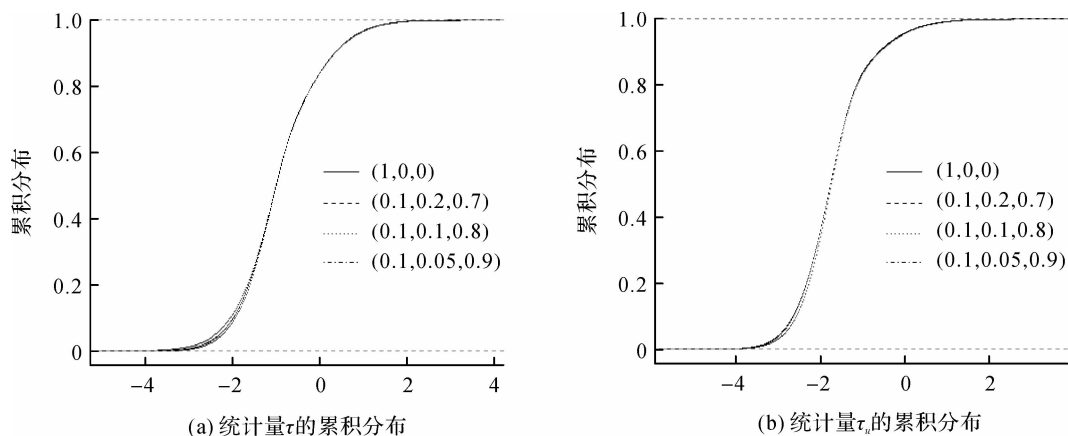


图 1 不同系数 $(\omega, \alpha_1, \beta_1)$ 下统计量 τ 和 τ_u 的累积分布

Fig. 1 Cumulative distributions of τ and τ_u for different coefficients $(\omega, \alpha_1, \beta_1)$

由于 STAR 模型的应用领域涉及很多宏观数据是小样本的情况, 比如像失业率和利率等^{[5]77}。接下来, 在小样本的情况下, 对各种数据生成过程中检验统计量临界值与渐进临界值进行比较。误差项中 GARCH 模型的参数设为 $(\omega, \alpha_1, \beta_1) = (0.1, 0.1, 0.8)$, 样本容量 T 设为 50、100、200、1 000 这 4 种情况。数据生成过程重复 50 000 次。图 2 给出了不同样本容量情况下检验统计量 τ 和 τ_u 的经验累积分布。对不同样本量而言, 统计量 τ 和 τ_u 的经验累积分布非常接近。特别是对无漂移项的数据生成过程, 样本容量的变化对临界值并没有造成很大的影响, 所以渐进临界值可以用来对不同的样本进行检验。进一步, 从图 2 可以看出, 如果给定名义水平和该水平下的临界值, 则不同样本量产生的实际拒绝水平与名义水平接近。所以渐进临界值表在小样本情况下对检验非线性平稳的 ESTAR-GARCH 模型仍然适用。

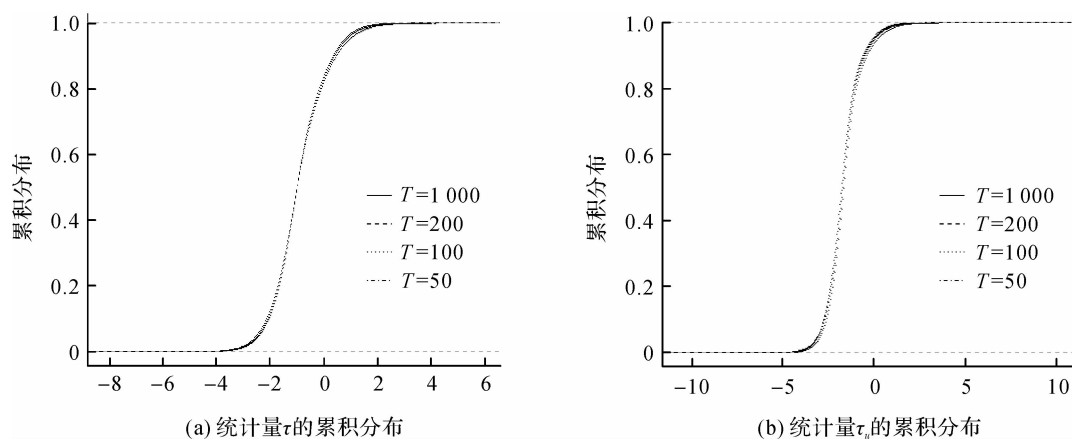


图 2 不同样本量下统计量 τ 和 τ_u 的累积分布

Fig. 2 Cumulative distributions of τ and τ_u for different sample sizes

为了评估在备择假设下即在平稳 ESTAR 过程中检验统计量的势, 不妨设数据生成过程为

$$\Delta y_t = \gamma y_{t-1} (1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}) + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = h_t^{1/2} e_t \text{ 且 } h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

其中 $\{e_t\} \sim \text{i. i. d.}(0, 1)$ 且 $\gamma = -1$ 。在实际应用中, 通常设 $\gamma = -1$ (参见文献[19])。由于在实际应用中在给定 $\gamma = -1$ 的情况下, θ 的估计值通常都比较小 (参见 Kapetanios 等^{[4]374}), 所以在模拟过程中, 仅考虑 $\theta = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ 的情况。表 1~2 中给出了检验统计量的势, 并将它们与常规的 DF 检验统计量 (记为

DF) 进行比较, 检验的实际水平设为 5%。从表中可以看出当 θ 较小时, 无论 $(\omega, \alpha_1, \beta_1)$ 如何取值, τ 和 τ_u 比常规的 DF 具有更高的势。举个例子来说明, 观察表 1~2 中当 $\theta = 0.01$, $(\omega, \alpha_1, \beta_1) = (0.1, 0.2, 0.7)$ 时, 样本量从 50 到 100, 统计量 τ 的势从 0.376 9 到 0.856 6, 而 DF 检验的势是 0.217 4 到 0.762 6; 统计量 τ_u 的势从 0.211 6 到 0.531 4, 而 DF 检验的势是 0.118 2 到 0.329 0。当然, 当 θ 取值变大, 因为模型渐进线性, DF 检验统计量会有更高的势。当样本量比较大时 (比如 $T = 200$), 可以看出, 所有检验统计量的势都接近 1。对比表 1 和表 2 可以看出, 在原始数据和去均值数据情况下, 前者检验统计量的势更高。

表 1 备择假设下统计量 τ 的势Table 1 Power of τ under alternative hypothesis

参数 $(\omega, \alpha_1, \beta_1)$	θ	T=50		T=100		T=200	
		τ	DF	τ	DF	τ	DF
(0.1, 0.2, 0.7)	0.01	0.376 9	0.217 4	0.856 6	0.762 6	0.998 4	0.999 7
	0.05	0.825 3	0.786 6	0.997 3	0.999 5	1.000 0	1.000 0
	0.10	0.936 5	0.953 8	0.999 6	1.000 0	1.000 0	1.000 0
(0.1, 0.1, 0.8)	0.01	0.358 0	0.203 1	0.870 0	0.792 8	0.999 3	0.999 9
	0.05	0.846 1	0.825 9	0.998 6	0.999 9	1.000 0	1.000 0
	0.10	0.952 6	0.972 0	0.999 9	1.000 0	1.000 0	1.000 0
(0.1, 0.05, 0.9)	0.01	0.503 9	0.328 7	0.964 7	0.965 2	1.000 0	1.000 0
	0.05	0.928 7	0.947 8	0.999 9	1.000 0	1.000 0	1.000 0
	0.10	0.982 9	0.994 8	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

注: 显著性水平为 5%。

表 2 备择假设下统计量 τ_u 的势Table 2 Power of τ_u under alternative hypothesis

参数 $(\omega, \alpha_1, \beta_1)$	θ	T=50		T=100		T=200	
		τ_u	DF	τ_u	DF	τ_u	DF
(0.1, 0.2, 0.7)	0.01	0.211 6	0.118 2	0.531 4	0.329 0	0.942 2	0.910 3
	0.05	0.543 1	0.374 5	0.945 5	0.942 5	0.999 7	1.000 0
	0.10	0.735 1	0.637 7	0.990 5	0.997 9	0.999 9	1.000 0
(0.1, 0.1, 0.8)	0.01	0.176 1	0.115 8	0.492 6	0.302 6	0.946 2	0.928 6
	0.05	0.537 8	0.365 1	0.957 1	0.965 1	0.999 9	1.000 0
	0.10	0.753 9	0.669 0	0.995 1	0.999 4	1.000 0	1.000 0
(0.1, 0.05, 0.9)	0.01	0.238 8	0.132 5	0.703 8	0.537 2	0.994 0	0.998 8
	0.05	0.691 3	0.539 2	0.993 6	0.999 0	1.000 0	1.000 0
	0.10	0.872 7	0.866 8	0.999 7	1.000 0	1.000 0	1.000 0

3 结 论

本研究在前人关于 ESTAR 模型单位根检验研究的基础上, 对误差项是独立同分布情景进行拓展, 研究了异方差情景下 ESTAR 模型的单位根检验。我们采用了 KSS 型统计量并推导了该检验统计量的渐进分布。从定理 1 和定理 2 中可以得出检验统计量的渐进分布是布朗运动的函数, 而不依赖于未知参数 σ_e^2 , 即无论数据生成过程是带漂移项还是零均值的过程, 在此基础上构建的检验统计量仍然是布朗运动的函数且与讨厌参数无关。对于漂移项的数据生成过程, 考虑不同系数的 GARCH 误差项或者不同样本量情况下, 检验统计量的累积分布比零均值过程相差较大, 这是因为带漂移项的数据生成过程, 一旦用最小二乘估计去均值, 势必会对检验统计量造成影响。

在实际应用中, GARCH 模型被广泛地应用于对经济 (金融) 时间序列波动性的研究, 它能较好地解决波动群集问题, 即大 (小) 的波动后紧跟的是大 (小) 的波动。由于 GARCH 模型的系数是未知的, 考虑了 KSS 型检验统计量来检验, 检验功效及检验水平分析表明, 该统计量具有良好的检验水平及较高的检验功效。因此, 在应用中, 无论数据生成过程中误差项是常数还是异方差情景, 都可以通过模拟对临界值

加以估计。从蒙特卡罗模拟可以得出,KSS 型检验统计量比常规的 DF 检验量具有更高的检验功效,为误差项不独立(相依)的非线性 ESTAR 模型的单位根检验(对这种过程的购买力平价理论的检验)提供了一定的参考依据。

参考文献:

- [1] KABIRI S, LOTFOLLAHZADEH T, SHAYESTEH M G, et al. Modelling and forecasting of signal-to-interference plus noise ratio in femtocellular networks using logistic smooth threshold autoregressive model[J]. IET Signal Processing, 2015, 9(1): 48.
- [2] CHEN R C Y, LEE C H. The influence of CSR on firm value: an application of panel smooth transition regression on Taiwan[J]. Applied Economics, 2017, 49(34): 1.
- [3] UBILAVA D, HELMERS C G. Forecasting ENSO with a smooth transition autoregressive model[J]. Environmental Modelling and Software Volume, 2013, 40(2): 181.
- [4] KAPETANIOS G, SHIN Y, SNELL A. Testing for a unit root in the nonlinear STAR framework[J]. Journal of Econometrics, 2003, 112(2): 359.
- [5] KRUSE R. A new unit root test against ESTAR based on a class of modified statistics[J]. Statistical Papers, 2011, 52(1): 71.
- [6] HANCK C. On the asymptotic distribution of a unit root test against ESTAR alternatives [J]. Statistics and Probability Letters, 2012, 82(2): 360.
- [7] 张凌翔, 张晓峒. 单位根检验中的 Wald 统计量研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2009, 26(7): 146.
- [8] 宫健, 高铁梅, 张泽. 汇率波动对我国外汇储备变动的非对称传导效应: 基于非线性 LSTARX-GARCH 模型[J]. 金融研究, 2017(2): 84.
- [9] LING S Q, LI W K. Asymptotic inference for unit root processes with GARCH(1, 1) errors[J]. Econometric Theory, 2003, 19(4): 541.
- [10] WANG G W. A note on unit root tests with heavy-tailed GARCH errors[J]. Statistics and Probability Letter, 2006, 76(10): 1075.
- [11] YUAN Y Z, ZHANG R M. Estimation for nearly unit root processes with GARCH errors [J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese University(Series B), 2010, 25(3): 297.
- [12] LUUKKONEN R, SAIKKONEN P, TERÄSVIRTA T. Testing linearity against smooth transition autoregressive models[J]. Biometrika, 1988, 75(3): 491.
- [13] YANG X R, ZHANG L X. A note on self-normalized Dickey-Fuller test for unit root in autoregressive time series with GARCH errors[J]. Applied Mathematics: A Journal of Chinese University(Series B), 2008, 23(2): 197.
- [14] HALL P, LUKACS E, BIRNBAUM Z W, et al. Martingale limit theory and its application[J]. Journal of the American Statistical Association, 1980, 78(78): 301.
- [15] MÜLLER U K, ELLIOTT G. Tests for unit roots and the initial condition[J]. Econometrica, 2003, 71(4): 1269.
- [16] PHILLIPS P C B, SOLO V. Asymptotics for linear processes[J]. The Annals of Statistics, 1992, 20(2): 971.
- [17] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [18] 严士健, 刘秀芳. 测度与概率[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1994.
- [19] TAYLOR M P, PEEL D A, SARNO L. Nonlinear mean-reversion in real exchange rates: toward a solution to the purchasing power parity puzzles[J]. International Economic Review, 2001, 42(4): 1015.