

最可几速率与波耳兹曼因子

李明

(杭州应用工程技术学院基础部 杭州 310012)

摘要 从气体分子麦克斯韦速率分布函数和气体分子麦克斯韦速度分布函数进一步理解最可几速率和波耳兹曼因子。

关键词 麦克斯韦速率分布函数 麦克斯韦速度分布函数 最可几速率 波耳兹曼因子

中图分类号 O552.3⁺¹

理想气体在平衡状态下,气体分子按速率分布规律即麦克斯韦速率分布律为:

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2KT}} \cdot v^2$$

$f(v)$ 表示单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率,从上式可知:在 $v = v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ 处, $f(v)$ 最大, v_p 称为最可几速率.物理意义是,在一定温度下,分子处于 v_p 附近,单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率最大。

人们一般会产生这样的疑问:为什么不会在 $v=0$ 的附近,分子数最多,因为,按麦克斯韦速度分布函数

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2KT}} \cdot dv_x dv_y dv_z$$

$f(v)$ 确实在 $v=0$ 附近分子数最多,可以用速度空间给以解释. $f(v)$ 是单位速率区间内的分子占总分子数的比率,它的速度空间代数半径为 v ,厚度为1的球壳内的分子数占总分子数的比率,如图1,很显然, v 越大,球壳体积越大,分子数越多,一方面 v 小,分子数密度大,另一方面 v 大,球壳体积大。

当 $v = v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ 时, $f(v)$ 取得极大。

在气体分子按平动能分布率中也有同样的疑问:从气体分子麦克斯韦速率分布函数,可推导出

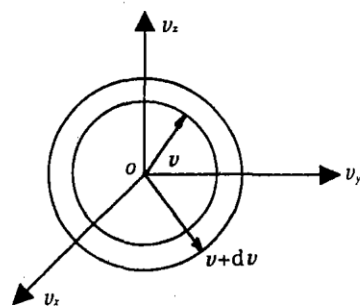


图1 气体分子速度分布空间图

$$f(\epsilon_k) = \frac{dN}{Nd\epsilon_k} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{KT} \right)^{3/2} \epsilon_k^{1/2} e^{-\frac{\epsilon_k}{KT}}$$

$$\text{其中 } \epsilon_k = \frac{1}{2} m v^2$$

$f(\epsilon_k)$ 表示分子平动动能在 $\epsilon_k \sim (\epsilon_k + d\epsilon_k)$ 区间单位动能间隔的分子数的比率,由 $\frac{df(\epsilon_k)}{d\epsilon_k} = 0$ 得 $\epsilon_p = \frac{1}{2} KT$

显然,最可几动能和最可速率对应的动能不相等,因为由 $v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$ 得 $\frac{1}{2} m v_p^2 = KT$, 当然更不是 $\epsilon = 0$ 处几率最大.

两个动能都以 KT 为恒量,但 KT 前的系数不相同,这是对应于不同的统计间隔的结果,用 $\epsilon_k = \frac{1}{2} m v^2$, 则 $d\epsilon_k = m v dv = (2m)^{1/2} \epsilon_k^{1/2} dv$. 又因动能间隔 $d\epsilon_k$ 正比于 $\epsilon_k^{1/2} dv$, 若取相等的速率间隔 dv , 则对应的动能间隔 $d\epsilon_k$ 就不相等^[1], 或者这样来理解: $f(\epsilon_k) d\epsilon_k$ 是动能在 ϵ_k 到 $\epsilon_k + d\epsilon_k$ 之间分子数占总分子数的比率,即速度空间是半径为 $\sqrt{\frac{2\epsilon_k}{m}}$, 厚度为 $\frac{d\epsilon_k}{\sqrt{2m\epsilon_k}}$ 的薄球壳中的分子数占总分子数的比率.

1 对于玻耳兹曼因子的理解

因为气体处于平衡状态时,在无外力场的情况下,可以认为是各向同性的,气体分子按速度的分布在3个相互独立的方向上应该有同样的规律.

可推导: $f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2KT}}$; $f(v_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2KT}}$; $f(v_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2KT}}$
 $f(v_x)$ 、 $f(v_y)$ 、 $f(v_z)$ 分别表示在单独考虑 x 、 y 、 z 方向运动时,相应分子相应速度的几率分布函数,它们是互相独立的^[2], 因此,若以 $\frac{dN}{N} = f(v) dv$ 表示气体中具有速度为 v (在 x 、 y 、 z 3个方向上的分速度是 v_x 、 v_y 、 v_z) 到 $v + dv$ (在 x 、 y 、 z 3个方向上的速度是 $v_x + dv_x$ 、 $v_y + dv_y$ 、 $v_z + dv_z$) 的分子比率, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= f(v) dv = f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z \\ &= \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2KT}} dv_x dv_y dv_z \quad [2] \end{aligned}$$

从上式可知,单位速度区间的分子数出现的几率正比于玻耳兹曼因子 $e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2KT}} = e^{-\frac{\epsilon_k}{KT}}$, 它反映了分子按能量分布的规律,即在一定温度下分子处于能量高的状态的几率比处于能量低的状态的几率小,即温度一定的分子先占据能量低的状态. 为加深理解,可假设气体分子只能在二维或一维中运动,则对于二维有:

$$f(v) = \frac{m}{2\pi KT} e^{-\frac{mv^2}{2KT}} \cdot 2\pi v \quad \text{可得 } v_p = \sqrt{\frac{KT}{m}}$$

$$\text{对于一维有: } f(v) = f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2KT}} \quad \text{可得 } v_p = 0$$

可见在一维运动时,体积影响可以消除,从而更清楚地理解了玻耳兹曼因子的物理意义.

参 考 文 献

- 1 周勇志. 大学物理. 广州: 华南理工大学出版社, 1988. 399 ~ 401
- 2 复旦大学《物理学》编写组. 物理学. 北京: 高等教育出版社, 1985. 392 ~ 444

The most probable speed and Boltzmann factor

Li Ming

(Department of Basic Science, Hangzhou insitute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract This paper makes further analysis of the most probable speed and Boltzmann factor from the gas molecule Maxwell distribution function of speed and the gas molecule Maxwell distribution law of velocity.

Key words Maxwell distribution function of speed Maxwell distribution law of velocity the most probable speed Boltzmann factor