

## 平衡实现时域法模态参数辨识的探讨

廖国宾 韩晓林

(东南大学工程力学系 南京 210018)

**摘 要** 本文讨论平衡实现法(BR)对时域信号进行分析的过程,通过算例将该法与理论计算结果进行比较,结果表明,本文讨论的方法具有较高的计算精度,对实测信号进行分析的结果可靠性较高。

**关键词** 时域信号 平衡实现法(BR) 振型识别

**中图分类号** TN911.6

模态识别的一般方法有频域法和时域法,频域法研究和应用较早,至今仍广泛应用于各种数据分析和模态识别中;时域法是60年代末开始发展起来的,1969年W.R.Smith直接从多自由度振动系统的自由响应的理论表达式出发,采用最小二乘曲线拟合法,识别系统的复频率与复模态.但由于该法是非线性问题,需要初始值,且收敛较慢,很费时,因而不实用.对在自然激励下结构物如运行中的汽车、火车、桥梁等的振动信号直接分析,时域法的基本优点在于不对模态参数作初始估计并能对测试数据在一次分析中识别各阶模态参数,因而,从70年代以来一直不断地得到有关学者和工程师们的广泛关注.近10年来,又有不少学者提出不同的方法,如:子空间技术(平衡实现和规范参数分析)和最小二乘复数法技术的固频响应技术(NEXT)<sup>[1]</sup>.每种方法都有其特点和优点.但是,对振动时域信号进行直接分析,由于方法繁琐,一直未得到广泛的应用.本文介绍的平衡实现方法(balanced realization 简称BR),便于计算机实现,并对振动信号的模态识别具有较高的辨识精度,有利于现场实时分析.

### 1 理论概述

#### 1.1 随机状态空间模型

考虑以下随机离散时间状态空间模型<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} \{x_{k+1}\} &= [A]\{x_k\} + \{w_k\} \\ \{y_k\} &= [C]\{x_k\} + \{v_k\} \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\{x_k\}$ 代表 $n$ 维状态向量( $n=2N_m$ ,  $N_m$ 为系统可识别的最大模态数量), $\{y_k\}$ 为 $N_{resp}$ 维输出向量. $\{w_k\}$ ,  $\{v_k\}$ 代表零均值白噪声序列,分别为过程噪声和输出噪声.取足够大的 $p$ 和 $q$ , $[A]$ 和 $[C]$

分别代表状态空间矩阵和输出矩阵,用这种模型,可得到  $p$  阶可观察矩阵  $[O_p]$  和  $q$  阶可控制矩阵  $[C_q]$ :

$$[O_p] = \begin{bmatrix} [C] \\ [C][A] \\ \vdots \\ [C][A]^{p-1} \end{bmatrix}; \quad [C_q] = [[G] \quad [A][G] \cdots [A]^{q-1}[G]] \quad (2)$$

式中:  $[G] = E[\{x_{k+1}\}\{y_k\}^T]$ ,  $E[\cdot]$  表示期望算子,假定矩阵  $[O_p]$  和矩阵  $[C_q]$  是  $N_m$  维.系统的动态响应特征由矩阵  $[A]$  的特征值和特征向量的可观部分确定.矩阵  $[A]$  的特征值的分解公式为

$$[A] = [\Phi][\Lambda][\Phi]^{-1} \quad (3)$$

方程(3)中的复特征值和特征向量常共轭出现.

$$\text{由以下方程: } \lambda_r = e^{\mu_r \Delta t} \text{ 得出: } \mu_r = \sigma_r + i\omega_r = \frac{1}{\Delta t} \ln(\lambda_r) \quad (4)$$

$\sigma_r$  和  $\omega_r$  为  $r$  阶阻尼和固频.

$$r \text{ 阶阻尼比由下式给出: } \xi_r = -\frac{\sigma_r}{\sqrt{\omega_r^2 + \sigma_r^2}} \quad (5)$$

$$r \text{ 阶模态振型由下式给出: } \{\Psi\}_r = [C]\{\phi\}_r \quad (6)$$

## 1.2 平衡实现法(BR)原理

以实测的响应信号  $\{y_k\}$  构造相关函数序列:

$$[R_k] = E(\{y_{k+m}\}\{y_m\}_{ref}^T) \quad (7)$$

在实际辨识模态参数时,用以下经验公式来取代公式(7):

$$[R_k] = \frac{1}{M-k} \sum_{m=0}^{M-k-1} \{y_{m+k}\}\{y_m\}_{ref}^T \quad (8)$$

$M$  为数据样本的数量

式中由以上的经验相关函数序列,构造经验的 Hankel 块状矩阵  $[H_{p,q}]$  (取足够大的  $p, q$ , 且  $p > q$ ):

$$[H_{p,q}] = \begin{bmatrix} [R_1] & [R_2] & \cdots & [R_q] \\ [R_2] & [R_3] & \cdots & [R_{q+1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [R_p] & [R_{p+1}] & \cdots & [R_{p+q+1}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

将 Hankel 进行 SVD 分解

$$[H_{p,q}] = [I \ U_1][U_2] \begin{bmatrix} [S_1] & [O] \\ [O] & [S_2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V_1]^T \\ [V_2]^T \end{bmatrix} = [U_1][S_1][V_1]^T + [U_2][S_2][V_2]^T \quad (10)$$

对角矩阵

$$[S_1] = \text{diag}(\sigma_1 \cdots \sigma_n), \sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \sigma_n \geq 0 \quad (11)$$

$$[S_2] = \text{diag}(\sigma_{n+1} \cdots \sigma_{pNresp}), \sigma_{n+1} \geq \sigma_{n+2} \cdots \sigma_{pNresp} \geq 0$$

$$\text{由上,得到可观矩阵为 } [O_p] = [U_1][s_1]^{1/2} \quad (12)$$

输出矩阵为  $[C] = [O_p]$  的第一块行

$$(13)$$

去掉可观矩阵  $[O_p]$  的第一与最后块行,分别得到矩阵  $[O_{p-1}^\dagger]$  和矩阵  $[O_{p-1}]$

由以下方程,解出状态矩阵  $[A]$  为

$$[O_{p-1}^\dagger] = [O_{p-1}][A] \quad (14)$$

## 2 算 例

### 2.1 计算机实现过程

{读入测试数据;  
设定参考点数  $\text{ref}$  及 Hankel 矩阵行块数  $p$  及列块数  $q$ ;  
形成相关系数矩阵和 Hankel 矩阵;  
将 Hankel 矩阵进行 SVD 分解;  
得到可观矩阵和可控矩阵;  
由可控矩阵计算得到状态空间矩阵和输出矩阵;  
由状态空间矩阵得到系统特征值和特征向量;  
计算出系统固有频率、阻尼、和振型;}

### 2.2 多自由度粘性阻尼系统的模态识别

如图 2.1 简化模型,质量  $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1 \text{ kg}$ ,弹簧刚度  $k_1 = k_2 = k_3 = k = 1 \text{ N/m}$ ,阻尼  $c_1 = c_2 = c_3 = c = 0.5$ ;在质量 1,2,3 上分别给初始位移和初速度  $\{1,2,3\} \text{ m}$ ,  $\{0.1,2,0.9\} \text{ m/s}$ ,采样频率  $10 \text{ Hz}$ ,得到的各阶模态、频率、阻尼比、振型与理论值[4,5]的比较如表 1.

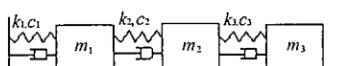


图 2.1 简化模型图

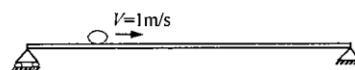


图 2.2 在简支梁图

表 1 10 Hz 时各阶模态计算值与理论值的比较

模态	理 论 值			BR 法 计 算 值		
	频率	阻尼比	振型	频率	阻尼比	振型
1	0.4422	0.1113	1:1.802:2.247	0.4418	0.074	1:1.80:2.248
2	1.1849	0.3113	1:0.445:-0.802	1.1846	0.3113	1:0.443:0.808
3	1.6087	0.4505	1:-1.247:0.555	1.609	0.4384	1:1.26:0.554

### 2.3 模型识别

如图 2.2 一在简支梁以速度  $v = 1 \text{ m/s}$  均匀移动的荷载  $P_0 = 10 \text{ kN}$ ,在  $t = 0$  时,荷载位于桥左端,桥处于静止状态,已知该试验梁材料为有机玻璃,每  $0.1 \text{ m}$  设一测点,采样频率  $1000 \text{ Hz}$ , $E = 28 \text{ MPa}$ , $L = 1.2 \text{ m}$ , $A = 31.76 \text{ e} - 5 \text{ m}^2$ , $J = 2.82 \text{ e} - 6 \text{ m}^4$ , $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,得到的各阶模态、频率、阻尼比、振型与理论值的比较如表 2.

表 2 1000 Hz 时各阶模态计算值与理论值的比较

比较值	模态	频率 Hz	阻尼比	振 型
理论值	1	108.07	0	1:1.93:2.73:3.34:3.73:3.86:3.73:3.34:2.73:1.93:1
计算值	1	108.05	-0.16	1:1.93:2.72:3.31:3.66:3.75:3.57:3.14:2.51:1.73:0.88
理论值	2	432.28	0	1:1.73:2.0:1.73:1.00:0.0:-1.00:-1.73:-2.0:-1.73:-1
计算值	2	432.28	-0.0012	1:1.72:1.96:1.64:0.84:0.22:-1.27:-2.02:-2.27:-1.94:-1.1
理论值	3	972.62	0	1:1.41:1.0:0.0:-1:-1.41:-1:0:1:1.41:1
计算值	3	972.64	-0.0033	1:1.4:0.95:0.45:-1.35:-1.78:-1.36:0.45:0.91:1.35:1

频率,各阶振型的计算值与理论值的曲线图如图 2.3~图 2.6,图中实线为计算值,“\*”和虚线表示理论值。

如果考虑计算振型的相位,则与理论振型图很好地吻合,由此可见 BR 法振型识别效果也是好的。

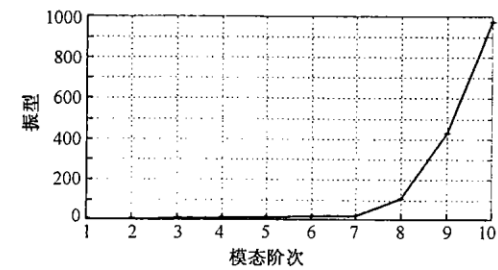


图 2.3 频率图

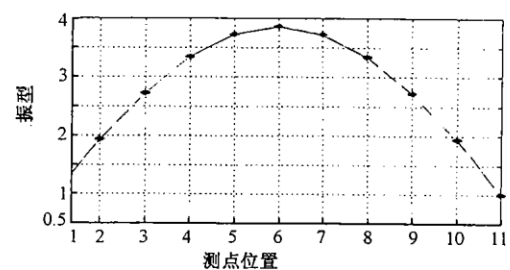


图 2.4 第一阶振型

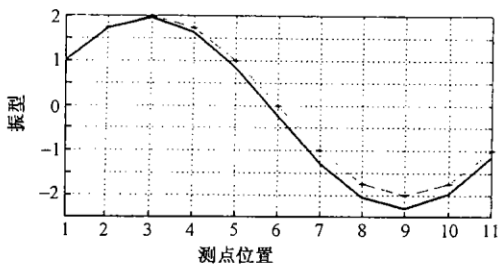


图 2.5 第二阶振型

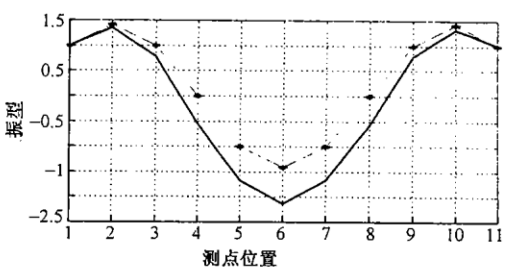


图 2.6 第三阶振型

### 3 讨 论

#### 3.1 采样频率对模态识别的影响

在实际测量中,当采样频率是系统固有频率的两倍以上时,模态识别效果较好,计算结果较稳定,但采样频率过高又导致数据测量的误差影响明显,反而影响识别精度.一般取  $2f_g \leq f_c \leq 10f_g$ ,  $f_g$  为被识别的固有频率,  $f_c$  为采样频率.不同采样频率的计算误差见表 3.在例 2.1 中,  $f_3 = 1.6 \text{ Hz}$ ,可见采样频率过低可导致模态识别困难,过高导致振型计算误差大,在实际分析时可先进行高采样分析,稳定后再选取适当的频率进行分析,可得到满意的模态分析结果,在上例中可看到  $10 \text{ Hz}$  是理想的采样频率。

表 3 不同采样频率的计算误差

采样频率	模 态	频率(%)	阻尼比(%)	振型(%)
$f_c = 10\text{Hz}$	1	0.037	20.69	0:0.74:0.01
	2	0.037	2.53	0:39.96:0
	3	0.012	0.97	0:0.75:1.02
$f_c = 1 \text{ Hz}$	1	0.05	318.95	0:35.8:75.3
	2	0.12	0.72	0:157.6:187.7
	3	3.66	75.8	0:64.94:43.69
$f_c = 0.1 \text{ Hz}$	1	(不能识别)		
$f_c = 100 \text{ Hz}$	1	0.0	41.1	0:0.9:11.14
	2	0.17	1.33	0:39.95:0.01
	3	1.4	3.14	0:6.22:17.08

### 3.2 数据样本 M 对模态识别的影响

数据样本 M 大有利于模态识别,在实际采样时应尽可能取得大的数据样本,也可按文献[5]的方法进行数据延拓.对于衰减信号更是如此.

## 4 结 论

BR 法进行实时数据的模态分析,在采取适当的采样频率和样本数据时,能精确地计算出各阶模态参数,该法对实际结构物的模态分析的优点是显著的.

### 参 考 文 献

- 1 L.Hermans, H.Vander Auweraer. Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial application. Proc. of the 6th international conference on recent advances in structural dynamics. 1999. 549 ~ 564
- 2 Yong Linpi, N.C.Mickleborough. Modal identification of vibrating structures using ARMA modal. ASC Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(10): 2233 ~ 2248
- 3 张淮,汪凤泉.振动分析.南京:东南大学出版社,1991.156 ~ 246
- 4 倪振华.振动力学,西安:西安交通大学出版社,1989.181 ~ 220
- 5 徐峰,王志芳,王宝圣.AR 模型应用于振动信号趋势预测的研究,清华大学学报(自然科学版),1999,39(4),57 ~ 59

## Discussion of the balanced realization for identification of modal parameters

Liao Guobin Han Xiaolin

(Department of Engineering Mechanics, Southeast University, Nanjing 210018)

**Abstract** The procedure of the balanced realization for identification of modal parameters and vibration analysis is discussed. By aid of an industrial case, a comparison is made with the theory parameters to illustrate the effectiveness, accurateness and reliability of this method.

**Key words** time-domain response signals balanced realization identification of modal shape