浙江科技学院学报,第 17 卷第 1 期,2005 年 3 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 1, Mar. 2005

关于同时求多项式重零点的迭代法

章 迪 平
(浙江科技学院 理学系,浙江 杭州 310023)

摘 要:利用 Gauss-Seidel 加速技巧建立了一种至少 4 阶收敛的求解多项式重零点的并行迭代方法,分析并证明了相应的收敛性定理,最后还给出了数值例子。

关键词:多项式;重零点;迭代法;收敛阶
中图分类号:O241.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2005)01-0001-03

Iterative methods for finding multiple zeros of a polynomial simultaneously

ZHANG Di-ping
(Department of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper proposes an iterative method in Gauss-Seidel way for finding all multiple zeros of a polynomial, which is of at least four order convergence. The convergence theorem is analyzed and proved. Finally, a numerical result is given.

Key words: polynomial; multiple zeros; iterative method; order of convergence

在很多实际问题中,常常会遇到求多项式的零点(即求方程的根),文献[1~4]分别建立了不同阶数的同时求解多项式重零点的迭代方法,并分析了相应方法收敛的初始值条件。本文在文献[2]的基础上,结合 Gauss-Seidel 加速技巧,给出另一种至少 4 阶收敛且收敛速度更快的、求解多项式重零点的并行迭代方法,并对收敛性及收敛阶进行了分析和证明,改进了相关文献的结果,最后还给出了数值例子。

1 方法的构造

考虑一个首项系数为 1 的多项式

$$f(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - \xi_j)^{\mu_j}, \tag{1}$$

其具有实的或复的重零点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$,重数分别为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$,而 $\sum_{j=1}^{m} \mu_j = n (1 \leqslant m \leqslant n)$。文献[1] 给出了如下迭代方法:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\mu_i \dfrac{(x_i^{(j)})}{f'(x_i^{(k)})}}{1 - \dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \dfrac{\mu_j}{x_i^{(k)} - x_j^{(k)}}},$$

$$i = 1, 2, \cdots, m, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

若对(1) 式用 Newton 法,则有

收稿日期:2004-06-08
作者简介:章迪平(1966—),男,浙江诸暨人,副教授,硕士,主要从事大学数学教学及计算数学研究。

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \mu_i \frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}, \tag{3}$$

文献[2]将 Newton 法与(2)式结合使用，建立了如下迭代方法：

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \dfrac{a_i^{(k)}}{1 + a_i^{(k)} b_i^{(k)}}, \text{其中} \\ a_i^{(k)} = -\dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})},\ b_i^{(k)} = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \dfrac{\mu_j}{x_i^{(k)} - u_j^{(k)}} \\ u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \mu_j a_j^{(k)} \end{cases} \tag{4}$$

本文对(4)式进一步利用 Gauss-Seidel 加速技巧得到以下迭代格式：

$$\begin{cases} x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \dfrac{a_i^{(k)}}{1 + a_i^{(k)} b_i^{*(k)}}, \text{其中} \\ b_i^{*(k)} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{\mu_j}{x_i^{(k)} - \mu_j^{(k+1)}} + \sum\limits_{j=i+1}^{m} \dfrac{\mu_j}{x_i^{(k)} + \mu_j^{(k)}} \\ a_i^{(k)} = -\dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})},\ u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \mu_j a_j^{(k)} \end{cases} \tag{5}$$

为了便于讨论此迭代格式的收敛性，先将(5)式改写成

$$\varepsilon_i^{(k+1)} = \frac{y_i^{(k)}}{1 + y_i^{(k)}} \varepsilon_i^{(k)}, \tag{6}$$

其中

$$\varepsilon_i^{(k)} = x_i^{(k)} - \xi_i, \tag{7}$$

$$y_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{(x_i^{(k)} - \xi_i)(\xi_j - u_j^{(k+1)})}{(x_i^{(k)} - \xi_j)(x_i^{(k)} - u_j^{(k+1)})} + \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{(x_i^{(k)} - \xi_i)(\xi_j - u_j^{(k)})}{(x_i^{(k)} - \xi_j)(x_i^{(k)} - u_j^{(k)})}, \tag{8}$$

$$i = 1,2,\cdots,m,\ k = 0,1,2,\cdots。$$

2 两个引理

先建立以下两个引理：

引理 1 设 $u_j^{(k)}$ 由(5)式确定，则存在与 j、k 无关的常数 $\delta > 0$，$c > 0$，使当 $|x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \delta$ 时，$|u_j^{(k)} - \xi_j| \leqslant c|x_j^{(k)} - \xi_j|^2$，$j = 1,2,\cdots,m$，$k = 0,1,2,\cdots$。

事实上，由于 Newton 法是平方收敛的[5]，所以对每个 j，存在与 k 无关的常数 $\delta_j > 0$，$c_j > 0$，当 $|x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \delta_j$ 时，$|u_j^{(k)} - \xi_j| \leqslant c_j|x_j^{(k)} - \xi_j|^2$，只要取 $\delta = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \delta_j$，$c = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} c_j$，即得引理 1。若记

$$d_i = \min_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} |\xi_j - \xi_i|,\ d = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} d_i,\ \mu = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \mu_i, \tag{9}$$

则有

引理 2 存在自然数 r 满足：$\dfrac{d}{r} \leqslant \delta$，$r \geqslant cd$，$\mu(r-1)(r-2) > 2(n-\mu)$，这里 c、δ 为引理 1 中确定的常数。

3 收敛性定理及其证明

为了分析算法的收敛性，再引进以下记号：

$$\varepsilon^{(k)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \varepsilon_i^{(k)} \quad (k = 0,1,2,\cdots), \tag{10}$$

$$\lambda_n = \frac{(n-\mu)}{\mu(r-1)(r-2)}。 \tag{11}$$

定理 1 当 $(|\varepsilon_j^{(0)}| = |x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \dfrac{d}{r}$ $(j = 1,2,\cdots,m)$ 时，由(5)式产生的序列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 ξ_i，且收敛阶至少为 4。

证明 (i) 先证明收敛性。当 $j \neq i$ 时，由引理 1 和引理 2 可得

$$|x_i^{(0)} - \xi_j| \geqslant |\xi_i - \xi_j| - |x_i^{(0)} - \xi_i| \geqslant \frac{r-1}{r} d, \tag{12}$$

$$|u_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant c|\varepsilon_j^{(0)}|^2 \leqslant c(\frac{d}{r})^2 \leqslant \frac{d}{r}, \tag{13}$$

$$|u_j^{(0)} - x_i^{(0)}| \geqslant |\xi_i - \xi_j| - |x_i^{(0)} - \xi_i| - |u_j^{(0)} - \xi_j| \geqslant \frac{r-2}{r} d, \tag{14}$$

于是，有

$$|y_i^{(0)}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{|\varepsilon_i^{(0)}|c|\varepsilon_j^{(0)}|^2}{\frac{r-1}{r}d\frac{r-2}{r}d} + \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{|\varepsilon_i^{(0)}|c|\varepsilon_j^{(0)}|^2}{\frac{r-1}{r}d\frac{r-2}{r}d} \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{c(\frac{d}{r})^3}{\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} + \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{c(\frac{d}{r})^3}{\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} \leqslant \frac{c(n-\mu)(\frac{d}{r})^3}{\mu\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{1}{2}。 \tag{15}$$

现记

$$q_n = \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}, \tag{16}$$

则 $q_n < 1$，且有

$$|\varepsilon_i^{(1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(0)}|}{1 - |y_i^{(0)}|} |\varepsilon_i^{(0)}| \leqslant \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n} |\varepsilon_i^{(0)}| = q_n |\varepsilon_i^{(0)}|。 \tag{17}$$

若设 $|\varepsilon_j^{(k)}| \leqslant \dfrac{d}{r}$ $(j = 1,2,\cdots,m)$，则类似于(15)式和(17)式可得

$$|y_i^{(k)}| \leqslant \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{|\varepsilon_i^{(k)}| c |\varepsilon_j^{(k)}|^2}{\frac{r-1}{r}d \frac{r-2}{r}d} + \sum_{j=i+1}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{|\varepsilon_i^{(k)}| c |\varepsilon_j^{(k)}|^2}{\frac{r-1}{r}d \frac{r-2}{r}d} \leqslant$$

$$\frac{c(n-\mu)(\frac{d}{r})^3}{\mu \frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{1}{2}; \tag{18}$$

及

$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(k)}|}{1-|y_i^{(k)}|}|\varepsilon_i^{(k)}| \leqslant$$

$$\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}|\varepsilon_i^{(k)}| = q_n|\varepsilon_i^{(k)}|。 \tag{19}$$

因而,由数学归纳法知,当定理 1 的条件满足时,(18) 式与(19) 式同时成立。

由(19) 式得到

$$|\varepsilon_i^{(k)}| \leqslant q_n^k \leqslant |\varepsilon_i^{(0)}| \leqslant (\frac{d}{r})q_n^k, \tag{20}$$

因此,当 $k \to \infty$ 时,$\varepsilon_i^{(k)} \to 0$,即$\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = \xi_i$。

(ii) 再分析收敛阶。由(11) 式和(18) 式可得

$$|y_i^{(k)}| \leqslant \frac{c(n-\mu)r^2}{\mu(r-1)(r-2)d^2}|\varepsilon^{(k)}|^3 =$$

$$\frac{c\lambda_n r^2}{d^2}|\varepsilon^{(k)}|^3。 \tag{21}$$

记

$$c_1 = \frac{2c\lambda_n r^2}{d^2}, \tag{22}$$

则由 $|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(k)}|}{1-|y_i^{(k)}|}|\varepsilon_i^{(k)}|$ 得

$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant c_1|\varepsilon^{(k)}|^4, \tag{23}$$

故迭代法(4) 是至少 4 阶收敛的。

4 数值例子

设 $f(x) = (x-1)^3(x+3)^2(x-5)$,利用文献[2]中的迭代式(4) 及本文构造的迭代式(5) 上机进行求解,其计算结果列于表 1(精度要求 10^{-12})。

表 1 求解 $f(x) = 0$ 的计算结果

迭代次数	迭代式(4)			迭代式(5)		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2.5	−3.3	5.4	2.5	−3.3	5.4
1	2.052145301526	−3.015265432414	5.124532658147	2.012654893415	−3.004256831754	5.025418791254
2	1.012145786857	−2.983254671585	4.995412874126	1.002145873297	−2.990245876821	5.002548796141
3	0.999999912453	−3.000000124862	4.999999415862	1.000000012145	−2.999999992157	5.000000000180
4	0.999999999984	−2.999999999607	5.000000003235	1.000000000000	−3.000000000021	5.000000000000

从表 1 可以看到,迭代 4 步后迭代式(4) 得到的近似解 $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}$ 的精度分别为 10^{-7},10^{-6},10^{-8},而迭代式(5) 得到的近似解 $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x_3^{(4)}$ 的精度分别为 10^{-12},10^{-11},10^{-12}。显然,本文构造的迭代法比文献[2] 的方法具有更高的收敛速度。

参考文献:

[1] 魏木生,高利新.一种同时求解多项式重根的迭代方法及其收敛性[J].华东师范大学学报,1998,(2):16-20.

[2] 章迪平.求解多项式重零点的并行迭代方法[J].浙江科技学院学报,2003,15(3):138-140.

[3] Ehrlich L W. Modified Newton method for polynomials[J]. Comm ACM, 1967, (10):107-108.

[4] Vander Straeten M, Van de Vel H. Multiple root-finding methods[J]. J Comp Appl Math, 1992, 40(1):105-114.

[5] 曹志浩,张玉德,李瑞遐.矩阵计算和方程求根[M].北京:人民教育出版社,1979.