浙江科技学院学报,第 21 卷第 4 期,2009 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.21 No.4, Dec. 2009

一类非线性波动方程整体解的渐近性质

叶耀军
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:研究一类带有非线性阻尼项和源项的非线性波动方程的初边值问题,在阻尼项和源项较弱的假设条件下,应用 M.Aassila 的方法证明了整体解的强渐近稳定性。

关键词:非线性波动方程;初边值问题;渐近稳定性
中图分类号:O175.29　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2009)04-0311-02

Asymptotic stability of global solutions to some nonlinear wave equations

YE Yao-jun
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The initial-boundary value problems for some nonlinear wave equations with nonlinear damping and source terms are studied. Under weaker assumptions about damping term and source term, the strong asymptotic stability of global solutions are proved by the method of M.Aassila.

Key words: nonlinear wave equation; initial-boundary value problem; asymptotic stability

设 $\Omega \subset R^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的测度有限的区域,$R^+ \equiv [0, +\infty]$。本文研究下列具有阻尼项和源项的非线性波动方程的初边值问题

$$u_{tt} - \Delta u + g(u_t) + f(u) = 0, (x,t) \in \Omega \times R^+, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times R^+ \tag{3}$$

整体解的渐近稳定性。

当非线性阻尼项 $g(u_t)$ 和源项 $f(u)$ 单调且源项在原点附近具有多项式增长及 Ω 是有界区域的条件下,许多研究人员[1-4] 用不同的方法研究了问题(1)～(3)整体解的渐近稳定性或一致稳定性。当 $g(u_t)$ 和 $f(u)$ 的假设条件减弱,即 g 和 f 不单调,在原点附近不具有多项式增长且区域 Ω 有限可测时,上述解决问题的方法不能使用,为此,必须去寻求新的处理方法。

关于非线性函数 g 和 f,作如下的假设:

收稿日期:2009-05-04
基金项目:浙江省教育厅科研计划项目(Y200803804);河南省教育厅自然科学基金资助项目(2007110013);浙江科技学院科研基金项目(20080516);浙江科技学院中青年骨干教师资助项目(2008—2010)
作者简介:叶耀军(1965—　),男,河南正阳人,教授,主要从事非线性偏微分方程研究和数学教学。

(H_1)当 $|x|\leqslant 1$ 时,存在常数 $k>0$,使得 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$ 且 $g(0)=0$。

(H_2)当 $x\neq 0$ 时,$xg(x)>0$。

(H_3)存在 $q\geqslant 2$ 及正常数 c_1 和 c_2,满足(i)$q\leqslant \frac{2n}{n-2}$;(ii)$c_1|x|\leqslant|g(x)|\leqslant c_2|x|^{q-1}$,$|x|\geqslant 1$。

(H_4)设 $f(x):R\to R$ 连续,且 $xf(x)>0$,$x\in R$。

(H_5)设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,且存在常数 $c>0$,使得 $F(x)\leqslant cxf(x)$,$\forall x\in R$。

在与(H_1)~(H_5)相近的假设或比(H_1)~(H_5)较强的假设下,利用文献[5-7]中的方法和技巧可证明问题(1)~(3)整体解的存在性和唯一性。本文的目的是应用 M.Aassila[8] 的方法来解决问题(1)~(3)整体解的强渐近稳定性。

为了方便起见,以后用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 范数,$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数,$\|\nabla\cdot\|$ 表示 $H_0^1(\Omega)$ 的等价范数 $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$。

1 引 理

问题(1)~(3)解的能量定义如下:

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$$

方程(1)两边同乘以 u_t,并在 Ω 上积分得:

$$\int_\Omega u_{tt}u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta u u_t\mathrm{d}x+\int_\Omega f(u)u_t\mathrm{d}x=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x$$

由(H_5)知,$F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$,所以根据上式可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right]=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x。$$

即

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x。$$

由(H_2)知,$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}<0$。因此能量 $E(t)$ 是非增的,即对 $\forall t\geqslant 0$ 时,$E(t)\leqslant E(0)$。

为了证明主要结果,需要下面的引理。

引理 1[8] 设 $u(x,t)$ 是问题(1)~(3)的解,则 $t\to+\infty$ 时,$\int_0^t\|u_t\|^2\mathrm{d}s=o(t)$。

引理 2[8] 设 $u(x,t)$ 是问题(1)~(3)的解,并且 $g(\cdot)$ 满足(H_1),(H_2)和(H_3),则 $t\to+\infty$ 时,$\int_0^t\int_\Omega|ug(u_t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}s=o(t)$。

2 主要结果及其证明

定理 1 设$(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$,且($H_1$)~($H_5$)满足,则问题(1)~(3)存在唯一的整体解 $u(x,t)\in L^\infty(R^+;H_0^1(\Omega))$,$u_t(x,t)\in L^\infty(R^+;L^2(\Omega))$,并且,当 $t\to+\infty$ 时,$E(t)\to 0$。

证明 存在唯一性结果的证明方法和技巧可参见文献[5-7],下面仅证明渐近稳定性部分。

用反证法证明,假设 $\lim\limits_{t\to+\infty}E(t)=h>0$,则

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\geqslant h,$$

由(H_5)知,

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+c\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x\geqslant h,$$

令 $l=\max\left(\frac{1}{2},c\right)$,则

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x\geqslant\frac{h}{l}=m>0。\tag{4}$$

设 $\Phi(t)=\int_\Omega uu_t\mathrm{d}x$,则由引理 1、引理 2 和式(4)可知:

$$\begin{aligned}\Phi(t)-\Phi(0)&=\int_0^t\Phi'(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\int_\Omega(u_t^2+uu_{tt})\mathrm{d}x\\&=2\int_0^t\|u_t\|^2\mathrm{d}s-\int_0^t\int_\Omega ug(u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s-\\&\quad\int_0^t\left[\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s\\&\leqslant -mt+o(t),t\to+\infty。\end{aligned}$$

即

$$-\Phi(t)\geqslant mt-o(t)-\Phi(0)$$

由此得,

$$\Phi(t)\to-\infty,t\to+\infty\tag{5}$$

另一方面,对于 $t\geqslant 0$,由 Sobolev 及 Poincaré 不等式得:

$$\begin{aligned}|\Phi(t)|&\leqslant\|u\|\|u_t\|\leqslant CE(t)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|\\&\leqslant CE(t)\leqslant CE(0)。\end{aligned}\tag{6}$$

式(5)与式(6)矛盾。故 $\lim\limits_{t\to+\infty}E(t)=0$。

主要结果证毕。

(下转第 331 页)