浙江科技学院学报,第 21 卷第 4 期,2009 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.21 No.4, Dec. 2009

Universe 分解中纽结的孤立性

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:给出了孤立纽结分解的定义,所谓孤立的(非平凡)纽结分解,即在不改变投影的前提下,universe 分解中的该纽结改变其任何一个交叉都是平凡纽结。通过分析和讨论各种可能情形,回答了二重点为 $n(\leqslant 5)$的素 universe 分解中是否存在孤立的交叉数为 n 的非平凡纽结分解的问题。

关键词:universe;纽结;分解;孤立的纽结分解
中图分类号:O189.24　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2009)04-0313-03

Isolation of knot in universe resolution

TAO Zhi-xiong
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: A definition of an isolated knot resolution is given, i.e. under the fixed projection, unknot will be obtained by changing any crossing of a knot in a universe resolution. By analyzing and discussing all possible cases, the author answers the question whether there is an isolated n crossing knot in a prime $n(\leqslant 5)$double points universe resolution.

Key words: universe; knot; resolution; isolated knot resolution

1　概念与问题

universe K 是定向的 S^1 到 S^2 或 $\mathbb{R}^2$ 的浸入的像[1],并且其所有的二重点都是横截的(transverse)。设 K 是一个 universe,x 是它的一个二重点,代替 x 以正交叉称为 x 的正分解和代替 x 以负交叉称为 x 的负分解[2]。

如上分解每个二重点可得该universe有 2^n 个分解即 2^n 纽结,该分解全体记为 $\wp_n$,每个纽结称为 K 的一个分解。

在一个 universe 所有分解中,若一个非平凡的纽结分解,改变它的任何一个交叉得到的都是平凡纽结分解,则称该纽结是孤立的。如果 2 个纽结分解仅相差一个交叉的改变,则称它们是相邻的。

如果一条简单闭曲线 C 交 K 于 P 和 Q(图 1)。K 中从 P 到 Q 的弧添加上一段连接 Q,P 的无重点的弧得到一个 universe K_1。同样,由剩下的弧可得另一个 universe K_2,这样的 K 称为 K_1 与 K_2 的和,记作 $K = K_1 \oplus K_2$,K_1 与 K_2 称为 K 的因子。如果 K_1 和 K_2 中总有一个是平凡的(即为简单闭曲线),则说 K 是素的[2]。

这个定义显然依赖于 universe。

收稿日期:2009-07-06
作者简介:陶志雄(1961—　),男,浙江绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

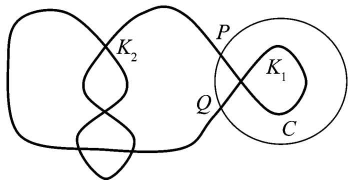


图1 2个universe的和

Fig.1 Sum of two universes

考察universe，就是为了研究纽结之间的相互关系，以及在universe分解中的纽结分布问题。孤立性的概念是笔者首次提出的，到目前为止，还没有看到类似文章的发表。

问题：在universe分解集$\wp_n$中，有没有孤立的非平凡纽结？

本文对这个问题进行了初步的研究，得到以下定理：

定理 在任何素$\wp_5$中，不存在孤立的交叉数为5的非平凡纽结分解。在任何素$\wp_3$，$\wp_4$中，则分别有交叉数为3，4的孤立的非平凡纽结分解。

换言之，在二重点为5的素universe分解$\wp_5$中，任何一个非平凡纽结$K \in \wp_5$，必可以找到另一个非平凡纽结$\hat{K} \in \wp_5$与之相邻。而在任何素$\wp_3$，$\wp_4$中，则任何交叉数分别为3，4的非平凡纽结分解仅和平凡纽结分解相邻。

2 定理的证明

由于一个universe是定向的S^1到S^2或$\mathbb{R}^2$的浸入的像，在universe上从一个定点P(不是二重点)出发沿定向前行，遇到二重点依次标上1，2，…，$2n$，于是每一个二重点对应于一个数对(a,b)，下文称为标识。

Universe性质：一个二重点，若标识为(a,b)，就意味着一条从a出发到b终结的闭回路(loop)，因有n个二重点，故这样的闭回路也有$2n$条。对于任意一条这样的闭回路，注意到其他回路一定和该回路有偶数(或零)个横截相交点(即二重点)。这就是说，如果该二重点标识是(a,b)或(b,a)，那么介于a，b这2个数中取自1，2，3，…，$2n$只能有偶数个，简言之，$|a-b|$是个奇数。

另外，素的universe不会有满足$|a-b|=1$的标识(a,b)。否则，该universe中就有出现(参考图1)，与该universe是素的不相符。

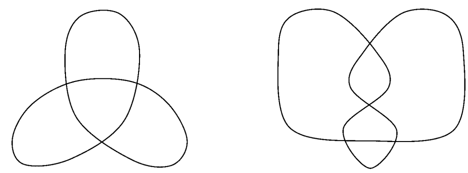
下面总是用$\{(a_1,a_2),(a_3,a_4),\cdots,(a_{2n-1},a_{2n})\}$表示一个$n$个二重点的universe，其中$a_k \in \mathbb{Z}/(2n\mathbb{Z})$，$k=1,2,\cdots,2n$。同时，为了更清晰地表示各种可能的universe，本文采用记号$(a_1,a_2) \to (a_3,a_4) \to \cdots \to (a_{2n-1},a_{2n})$表示按照前述的"universe性质"先从1，2，…，$2n$取定(a_1,a_2)，然后再在剩下的数($2n-2$个)中按照"universe性质"取定(a_3,a_4)，…最后可以找到可能的universe。

对于n为3，4，universe只可能是：

$(1,4) \to (2,5) \to (3,6)$ 即图2(*a*)，

$$(1,4) \to \begin{cases} (2,5) \to \begin{cases} (3,6) \to (7,8) & \times \\ (3,8) \to (6,7) & \times \end{cases} \\ (2,7) \to \begin{cases} (3,6) \to (5,8) & \\ (3,8) \to (5,6) & \times \end{cases} \end{cases},$$

根据前面的讨论，仅$\{(1,4),(2,7),(3,6),(5,8)\}$是素的universe。即图2(*b*)。



(a) (b)

图2 $n \leqslant 4$时，剩下的universe

Fig.2 The remaining universes for $n \leqslant 4$

图2(a)中，若全部是正分解或全部是负分解，则得到三叶结3_1[3]。而其他分解全都是平凡纽结，因此，三叶结是孤立的。

图2(b)中，上面的2个二重点是正分解，下面的2个二重点是负分解，得到的是8字结4_1[3]；同样地，若上面的2个二重点是负分解，下面的2个二重点是正分解，得到的也是8字结。但其他的分解全都是平凡纽结。所以说8字结也是孤立的。

对于n为5，一个universe，含1的标识仅有下列情形：(1，4)，(1，6)，(1，8)。

第三种情形和第一种有一样的universe。事实上，只要将定点重新设置，退后3个二重点，即将P定在该universe的7与8之间，然后从P出发，沿定向重新给二重点标识即可。因此含1的本质上只有2种情形：(1，4)，(1，6)。不难得到：

$$(1,4) \to \begin{cases} (2,5) \to \begin{cases} (3,6) \to (7,10) \to (8,9) & \times \\ (3,8) \to (6,9) \to (7,10) & \\ (3,10) \to (6,9) \to (7,8) & \times \end{cases} \\ (2,7) \to \begin{cases} (3,6) \to (5,8) \to (9,10) & \times \\ (3,8) \to (5,10) \to (6,9) & \\ (3,10) \to (5,8) \to (6,9) & \end{cases} \\ (2,9) \to \begin{cases} (3,6) \to (5,8) \to (7,10) & \\ (3,8) \to (5,10) \to (6,7) & \times \\ (3,10) \to (5,8) \to (6,7) & \times \end{cases} \end{cases}$$

$$(1,6)\to\begin{cases}(2,5)\to\begin{cases}(3,8)\to(4,7)\to(9,10) & \times\\(3,8)\to(4,9)\to(7,10) & \\(3,10)\to(4,7)\to(8,9) & \times\\(3,10)\to(4,9)\to(7,8) & \times\end{cases}\\(2,7)\to\begin{cases}(3,8)\to(4,9)\to(5,10)\\(3,10)\to(4,9)\to(5,8)\end{cases}\\(2,9)\to\begin{cases}(3,8)\to(4,7)\to(5,10)\\(3,10)\to(4,7)\to(5,8)\end{cases}\end{cases}$$

因此可能的 universe 情形为：

{(1,4),(2,5),(3,8),(6,9),(7,10)}，
{(1,4),(2,7),(3,8),(5,10),(6,9)}，
{(1,4),(2,7),(3,10),(5,8),(6,9)}，
{(1,4),(2,9),(3,6),(5,8),(7,10)}，
{(1,6),(2,5),(3,8),(4,9),(7,10)}，
{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)}，
{(1,6),(2,7),(3,10),(4,9),(5,8)}，
{(1,6),(2,9),(3,8),(4,7),(5,10)}，
{(1,6),(2,9),(3,10),(4,7),(5,10)}，

易见：P 分别倒退越过 2 个和一个二重点有：

{(1,6),(2,9),(3,10),(4,7),(5,10)} =
{(1,4),(2,7),(3,10),(5,8),(6,9)} =
{(1,4),(2,5),(3,8),(6,9),(7,10)}，

类似地：

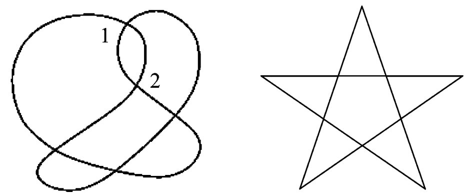
{(1,6),(2,7),(3,10),(4,9),(5,8)}=
{(1,6),(2,9),(3,8),(4,7),(5,10)}=
{(1,6),(2,5),(3,8),(4,9),(7,10)}=
{(1,4),(2,7),(3,8),(5,10),(6,9)}，

综合得可能的 universe 仅有：

{(1,4),(2,9),(3,6),(5,8),(7,10)}，
{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)}，
{(1,4),(2,7),(3,8),(5,10),(6,9)}，
{(1,4),(2,5),(3,8),(6,9),(7,10)}，

进一步由“universe 性质”可知：一个数对就表示一个闭回路，任意 2 个闭回路相交必为偶数个二重点，对于{(1,4),(2,9),(3,6),(5,8),(7,10)}，从 1 到 4 是一个闭回路，从 5 到 8 也是一个闭回路，但是这 2 个闭回路只有一个交点(二重点)(3,6)，因此它不是一个 universe。同理，{(1,4),(2,5),(3,8),(6,9),(7,10)}也不是一个 universe。剩下的{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)}，{(1,4),(2,7),(3,8),(5,10),(6,9)}的确是 universe，它们的 universe 依次如图 3 所示。

对于第一个 universe，若二重点 1,2 分解之后



(a)　　(b)

图 3　n=5 时，剩下的 universe

Fig.3　The remaining universes for n=5

异号，那么其他二重点不管怎样分解都是平凡纽结，这样的平凡纽结有 $2\times2^3=2^4$。如果全部是同号分解，那么就得纽结 5_2(2 个)，改变 5_2 的异于 1,2 的其他 3 个交叉，得到三叶结(6 个)；改变 5_2 的异于 1,2 的其他 3 个交叉中的 2 个，可以得到 6 个平凡纽结；改变 5_2 的异于 1,2 的其他 3 个交叉，可以得到 2 个 4_1。由此分析可知，在这里 2 个 4_1 是孤立的。而 3_1 不是孤立的。5_2 也不是孤立的。

对于第二个 universe，若全部是正分解或全部是负分解得到的是纽结 5_1(共 2 个)，而其解数(unknotting number)是 2[3]，所以它不可能是孤立的。而且容易看出，改变任何一个交叉得到的都是三叶结(共有 $2\times5=10$)，且都邻接于 5_1。注意到事实：全部是正分解的纽结 5_1，改变其 3 个(正)交叉得到的纽结等同于改变全部是负分解的纽结 5_1(即前者的镜面像)的 2 个(负)交叉所得纽结。而改变任何 2 个交叉得到的都是平凡纽结，这样的平凡纽结分解有 $2\times C_5^2=20$ 个，因此在所有 2^5 个分解中，没有孤立的交叉数为 5 的非平凡纽结分解。

因此证明了定理。

参考文献：

[1] KAUFFMAN L H. On Knots[M]. Beijing: World Publishing Corporation (Princeton University Press), 1990.

[2] 陶志雄.平凡纽结分解[J].浙江科技学院学报，2004，16(4):226-227.

[3] BAR-NATAN D. The Rolfsen Knot Table[DB/OL]. [2009-07-01]. http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/Knots/index.html.

[4] KAWAUCHI A. A survey of knot theory[M]. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1996.

[5] ADAMS C C. The Knot Book[M]. New York: W H Freeman and Company, 2004.