浙江科技学院学报,第 22 卷第 1 期,2010 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 22 No. 1, Feb. 2010

一类非线性 Petrovsky 方程解的渐近性态

李未材,叶耀军
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要: 研究一类带有非线性耗散项及源项的非线性 Petrovsky 方程的初边值问题。在非线性耗散项和源项较弱的假设条件下,证明了该问题整体解的渐近性态。

关键词: 非线性 Petrovsky 方程;非线性耗散项和源项;初边值问题;渐近性态
中图分类号: O175.29　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1671-8798(2010)01-0001-03

Asymptotic behavior of global solutions to nonlinear petrovsky equation

LI Wei-cai, YE Yao-jun
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The initial-boundary value problem for some nonlinear Petrovsky equation with nonlinear dissipative term and source term is studied. Under weaker assumptions about nonlinear dissipative term and source term, the asymptotic behavior of global solution to this problem is proved.

Key words: nonlinear petrovsky equation; nonlinear dissipative term and source term; initial-boundary value problem; asymptotic behavior

设 $\Omega \subset R^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的测度有限的区域,$R^+ \equiv [0, +\infty]$。本文考虑下列非线性 Petrovsky 方程的初边值问题

$$u_{tt} + \Delta^2 u + g(u_t) - \Delta u_t + f(u) = 0, (x,t) \in \Omega \times R^+, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times R^+。 \tag{3}$$

式(3) 中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示边界 $\partial\Omega$ 的外法向导数。

Guesmia A.[1] 研究了方程

收稿日期: 2009-09-05
基金项目: 浙江省教育厅科研计划项目(Y200803804);河南省教育厅自然科学基金资助项目(2007110013);浙江科技学院科研基金项目(20080516);浙江科技学院中青年骨干教师资助项目(2008—2010)

作者简介: 李未材(1959—　),男,浙江杭州人,讲师,主要从事基础数学的教学和研究。

$$u_{tt}+\Delta^2 u+q(x)u+g(u_t)=0,(x,t)\in\Omega\times R^+ \tag{4}$$

具有初边值条件(2) 和(3) 整体解的存在性和正则性结果。这里 g 是一个连续的增函数，且 $g(0)=0$，$q:\Omega\to[0,+\infty)$ 是有界函数。同时在关于 g 的适当增长条件下，他也建立了弱解和强解的衰减性。当式(4) 中的项 $q(x)u+g(u_t)$ 用 $\Delta^2 u_t+\Delta g(\Delta u)$ 替代时，Aassila M. 和 Guesmia A.[2] 应用 Komornik V. 引理[3] 得到了指数衰减结果。Messaoudi S. A.[4] 证明了问题(1) ～ (3) 整体解的存在性及解在有限时间内发生爆破。

本文的目的是在下述关于 $g(u_t)$ 和 $f(u)$ 的适当假设条件下，利用文献[4,5] 中的方法和技巧证明问题(1) ～ (3) 整体解的存在性和唯一性，应用 Aassila M.[6-7] 的方法来解决问题(1) ～ (3) 整体解的渐近性态。

关于非线性函数 g 和 f，笔者作如下的假设：

(H_1) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，存在常数 $k>0$，使得 $|g(x)|\leqslant k|x|$ 且 $g(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)>0$。

(H_2) 存在 $q\geqslant 1$ 及正常数 c_1 和 c_2，满足(i)$q\leqslant\dfrac{2n}{n-4}$；(ii)$c_1|x|\leqslant|g(x)|\leqslant c_2|x|^{q-1}$，$|x|\geqslant 1$。

(H_3) 设 $f(x):R\to R$ 连续，且 $xf(x)>0,x\in R$。

(H_4) 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且存在常数 $c>0$，使得 $F(x)\leqslant cxf(x),\forall x\in R$。

为了方便起见，以下用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 范数，$\|\cdot\|$ 表示 $L^2(\Omega)$ 范数，$\|\Delta\cdot\|$ 表示 $H_0^2(\Omega)$ 的等价范数 $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$。

1 引理和主要结果

问题(1) ～ (3) 解的能量定义如下：

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$$

方程(1) 两边同乘以 u_t，并在 Ω 上积分得：

$$\int_\Omega u_{tt}u_t\mathrm{d}x+\int_\Omega\Delta^2 uu_t\mathrm{d}x+\int_\Omega f(u)u_t\mathrm{d}x=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x+\int_\Omega u_t\Delta u_t\mathrm{d}x。$$

由(H_4) 知，$F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，所以根据上式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|^2+\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x\right]=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega|\nabla u_t|^2\mathrm{d}x。$$

即

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=-\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x-\int_\Omega|\nabla u_t|^2\mathrm{d}x。\tag{4}$$

由(H_1) 知，$\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}<0$。因此能量 $E(t)$ 是非增的，即 $E(t)\leqslant E(0),\forall t\geqslant 0$。

本文的主要结果叙述如下：

定理 1 设$(u_0,u_1)\in H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$，且($H_1$) ～ ($H_4$) 满足，则问题(1) ～ (3) 存在唯一的整体解 $u(x,t)\in L^\infty(R^+;H_0^2(\Omega))$，$u_t(x,t)\in L^\infty(R^+;L^2(\Omega))$，并且，当 $t\to+\infty$ 时，$E(t)\to 0$。

存在唯一性结果的证明方法和技巧可参见文献[4,5]，本文仅证明渐近稳定性部分。为此，需要下面的引理。

引理 1[6] 设 $u(x,t)$ 是问题(1) ～ (3) 的解，则 $t\to+\infty$ 时，$\int_0^t\|u_t\|^2\mathrm{d}s=o(t)$。

引理 2[6] 设 $u(x,t)$ 是问题(1) ～ (3) 的解，并且 $g(\cdot)$ 满足(H_1) 和(H_2)，则 $t\to+\infty$ 时，$\int_0^t\int_\Omega|ug(u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s|=o(t)$。

引理 3 设 $u(x,t)$ 是问题(1) ～ (3) 的解，则 $t\to+\infty$ 时，$\int_0^t\int_\Omega|u\Delta u_t|\mathrm{d}x\mathrm{d}s=o(t)$。

证明 式(4) 两边分别在$[0,t]$ 上积分得：

$$\int_0^t\int_\Omega g(u_t)u_t\mathrm{d}x\mathrm{d}s+\int_0^t\|\nabla u_t\|^2\mathrm{d}s=E(0)-E(t)\leqslant E(0)。$$

故
$$\int_0^t \|\nabla u_t\|^2 \mathrm{d}s \leqslant E(0),\ \forall t > 0。\tag{5}$$
由 Sobelev 不等式和 $E(t)$ 的定义知，$\|\nabla u\|^2 \leqslant C\|\Delta u\|^2 \leqslant CE(t) \leqslant CE(0)$。根据此式及 Cauchy-Schwarz 不等式有：
$$\int_\Omega |\nabla u \cdot \nabla u_t| \mathrm{d}x \leqslant \|\nabla u\| \cdot \|\nabla u_t\| \leqslant \sqrt{CE(0)}\|\nabla u_t\|。\tag{6}$$
由式(5)，式(6) 及 Hölder 不等式知
$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega |u\Delta u_t| \mathrm{d}x\mathrm{d}s &= \int_0^t\int_\Omega |\nabla u \nabla u_t| \mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \sqrt{CE(0)}\int_0^t \|\nabla u_t(s)\| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \sqrt{CE(0)t}\left[\int_0^t \|\nabla u_t(s)\|^2 \mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant E(0)\sqrt{Ct} = o(t), t \to +\infty。\end{aligned}$$
引理 3 证毕。

2　主要结果的证明

用反证法证明，假设 $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t) = M > 0$，则：
$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \geqslant M,$$
由(H_4) 知，
$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + c\int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x \geqslant M,$$
令 $h = \max\left(\frac{1}{2}, c\right) > 0$，则
$$\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega f(u)u\mathrm{d}x \geqslant \frac{M}{h} = M_0 > 0。\tag{7}$$
设 $\Phi(t) = \int_\Omega uu_t \mathrm{d}x$，则由引理 1，引理 2，引理 3 和式(7) 知：
$$\begin{aligned}\Phi(t) - \Phi(0) &= \int_0^t \Phi'(s)\mathrm{d}s = \int_0^t\int_\Omega (u_t^2 + uu_{tt})\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^t\left[\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}s + 2\int_0^t \|u_t\|^2 \mathrm{d}s + \\ &\quad \int_0^t\int_\Omega u\Delta u_t \mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_0^t\int_\Omega ug(u_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant -M_0 t + o(t), t \to +\infty。\end{aligned}$$
即：
$$-\Phi(t) \geqslant M_0 t - o(t) - \Phi(0)$$
由此得：
$$\Phi(t) \to -\infty, t \to +\infty。\tag{8}$$
另一方面，对于 $t \geqslant 0$，由 Sobelev 及 Poincaré 不等式得：
$$|\Phi(t)| \leqslant \|u\| \|u_t\| \leqslant CE(t)^{\frac{1}{2}}\|\Delta u\| \leqslant CE(t) \leqslant CE(0)。\tag{9}$$
式(8) 与式(9) 矛盾。故 $\lim\limits_{t\to+\infty} E(t) = 0$。

主要结果证毕。

参考文献：

[1] GUESMIA A. Existence globale et stabilisation interne non lineéaire d'un système de Petrovsky[J]. Bell Belg Math Soc，1998，5：583-594.

[2] AASSILA M，GUESMIA A. Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation[J]. Appl Math Lett，1999，12：45-52.

[3] KOMORNIK V. Exact Controllability and Stabilization：The Multiplier Method[M]. Paris：Masson，1994.

[4] MESSAOUDI S A. Global existence and nonexistence in a system of Petrovsky[J]. Journal of Math Anal and App，2002，265：296-308.

[5] LIONS J L. Quelques méthodes de résolution de problémes aux limites non linéaires[M]. Paris：Dunod-Gauthier Villars，1969.

[6] AASSILA M. Nouvelle approche à la stabilisation forte des systèmes distribués[J]. C R Acad Sci，1997，324：43-48.

[7] 叶耀军. 一类非线性波动方程整体解的渐近性质[J]. 浙江科技学院学报，2009，21(4)：311-313.