

具有 EGARCH-norm 误差项时序的 ADF 单位根检验

胡俊娟

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 在泛函中心极限定理基础上,给出了带有 AR 类滞后阶序列的检验统计量的极限分布及其证明;通过 Monte Carlo 随机模拟在 EGARCH-norm 条件下的单位根检验,给出了检验统计量的临界值及其实际扭曲水平和势。结果显示,用 $t(\hat{\rho})$ 统计量要比用 $t_{\hat{\rho}}$ 统计量更有效。

关键词: 滞后;统计量;临界值

中图分类号: O212;F224.0

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2010)06-0494-07

ADF testing for unit root in time series with EGARCH-norm errors

HU Jun-juan

(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The result about the limited distribution of test statistics with lag of AR models based on Functional Central Limit Theorem is demonstrated. Also ADF unit root test of finite sample time series under EGARCH with norm of the error term is simulated. Moreover, the critical value, exact size, power and the critical values of statistics are analyzed. The result shows that statistics $t(\hat{\rho})$ is an effective contrast to statistics $t_{\hat{\rho}}$.

Key words: lag; statistics; critical value

具有 GARCH-error 类的单位根过程对常规 ADF 检验临界值的影响程度如何,是进行 ADF 检验时需要认真分析的问题,因而备受关注^[1-3]。由于 GARCH 族模型中,较多的金融数据中存在波动的杠杆效应和滞后系数对波动的影响,但 EGARCH 模型能较好地描述金融时间序列^[4-6],因而 EGARCH-error 的单位根检验值得关注。王淑良^[3]只给出了临界值与标准 ADF 临界值的比较,没有给出其实际扭曲水平和势及相应 2 个统计量对比。金融时间序列建模分析中,序列的 ADF 检验其理论基础建立在泛函中心极限

收稿日期: 2010-06-12

基金项目: 浙江科技学院教学研究项目(F515108902)

作者简介: 胡俊娟(1979—),女,浙江兰溪人,讲师,硕士,主要从事数理统计方向的研究。

定理上。泛函中心极限定理是讨论随机过程极限分布的基础,主要用于说明时间序列中误差项的收敛情况。

1 泛函中心极限定理

这里引入泛函中心极限定理^[7]:设 $\{\mu_t\}$ 是一平稳序列,表示为无穷阶的 MA 序列为:

$$\mu_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \varphi(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}.$$

其中 $\varepsilon_t \sim \text{i. i. d.}(0, \sigma^2)$, $t = 1, 2, \cdots, \sigma^2 < \infty$, 且满足 $\sum_{j=0}^{\infty} j |\varphi_j| < \infty$ 。构造前 $[rT]$ 部分样本做统计量:

$$W_T(r) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[rT]} \mu_t,$$

其中 $r \in [0, 1]$, $[rT]$ 表示 rT 的整数部分, 则 $\{\sqrt{T}W_T(r)\}$ 为弱收敛序列, 且有 $\sqrt{T}W_T(r) \Rightarrow \sigma\varphi(1)W(r)$, 其中 $\varphi(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j$, ($\varphi_0 = 1$), $W(r)$ 是标准维纳过程。当 $\{\mu_t\}$ 为独立同分布序列时, 有 $\sqrt{T}W_T(r) \Rightarrow \sigma W(r)$ 。对于模型 $y_t = \rho y_{t-1} + \mu_t$, 基于泛函中心极限定理 Dickey^[8]给出了 $\{\mu_t\}$ 为 MA 序列检验统计量 $t_{\hat{\rho}}$ 和 $t(\hat{\rho})$ 的分布。

下面不妨讨论 $\{\mu_t\}$ 为 AR 序列的情况, 统计量的分布见定理 1。发现统计量的分布并未改变, 所以可以用检验统计量 $t_{\hat{\rho}}$ 和 $t(\hat{\rho})$ 来分析有限项 AR 类的 ADF 单位根检验问题。

定理 1 设一单整过程: $y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \varphi_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$, 其中 $\{\varepsilon_t\}$, i. i. d. $(0, \sigma^2)$ 。记 $D(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 - \cdots - \varphi_p L^p$, 假设 $D(L)$ 可逆, $D^{-1}(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$, 满足 $\sum_{j=1}^{\infty} j |b_j| < \infty$, 则有:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{T \cdot (\hat{\rho} - 1)}{D(1)} \Rightarrow \frac{(W^2(1) - 1)}{2 \int_0^1 W^2(t) dt} \\ 2) \quad & t(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\rho} - 1}{S(\hat{\rho})} \Rightarrow \frac{W^2(1) - 1}{2 \left(\int_0^1 W^2(r) dr \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

证明: $y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \varphi_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$, 即 $\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \varphi_k \Delta y_{t-k} + \varepsilon_t$, 其中 $\{\varepsilon_t\}$, i. i. d. $(0, \sigma^2)$ 。因为 $D(L)$ 可逆, 则有: $(D(L))\Delta y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$ 。

若 y_{t-1} 的观测列向量用 \mathbf{x} 表示, 滞后的 Δy 的观测值向量由 \mathbf{X} 表示, 则由 OLS 估计得检验统计量:

$$t_{\hat{\rho}} = T \times (\hat{\rho} - 1) = T \times \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{X}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = T \times \frac{\mathbf{x}^T \alpha \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \varepsilon}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \alpha + \frac{T^{-1} \sum_{t=2}^T y_{t-1} \varepsilon_t}{T^{-2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}.$$

在 $H_0: \rho = 1$ 即 $H_0: \alpha = 0$ 成立时, 则: $t_{\hat{\rho}} = \frac{T^{-1} \sum_{t=2}^T y_{t-1} \varepsilon_t}{T^{-2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2}$, $(D(L))\Delta y_t = \varepsilon_t$, 先考虑滞后阶数为 $p = 1$

的情况: $y_t = \rho y_{t-1} + \varphi_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ 。

不妨假设 $y_0 = 0$, 记 Δy_t 为 μ_t , 有 $y_t = \Delta y_t + \Delta y_{t-1} + \cdots + \Delta y_1 = \sum_{i=1}^t \mu_i$ 。假设 $\{y_t\}$ 为单整过程, 则 $\{\Delta y_t\}$

为平稳过程, 即 $\{\mu_t\}$ 为一平稳序列。在 $H_0: \rho = 1$ 条件下: $\mu_t = D(L)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^i \varepsilon_{t-j}$ 。

假设 $\sum_{j=0}^{\infty} j |\varphi_j| < \infty$, 记 $W_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{[Tt]} \mu_i$, 其中 $[Tt]$ 为取整。由泛函中心极限定理可得:

$W_T(t) \Rightarrow \sigma(1 - \varphi_1)^{-1} W(t)$, $W(t)$ 为标准维纳过程。

$$\begin{aligned}
 T^{-2} \sum_{i=1}^T y_{i-1}^2 &= T^{-1} \sum_{i=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{T \cdot \frac{i-1}{T}} \mu_i \right)^2 = \sum_{i=1}^T \frac{1}{T} W_T^2 \left(\frac{i-1}{T} \right) = \int_0^1 W_T^2(t) dt. \\
 T^{-1} \sum_{i=1}^T y_{i-1} \varepsilon_i &= T^{-1} \sum_{i=1}^T \left(\sum_{i=1}^{i-1} u_i \right) (D(L) \mu_i) = \\
 &= T^{-1} \sum_{i=1}^T \left(\sum_{i=1}^{i-1} \mu_i \right) ((1 - \varphi_1 L) \mu_i) = \\
 &= T^{-1} \sum_{i=1}^T \left(\sum_{i=1}^{i-1} \mu_i \right) \mu_i - \varphi_1 T^{-1} \sum_{i=1}^T \sum_{i=1}^{i-1} \mu_i \mu_{i-1} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T \mu_i \right)^2 - \frac{\sum_{i=1}^T \mu_i^2}{2T} - \varphi_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{T-1} \mu_i \right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{T-1} \mu_i^2}{2T} \right] = \\
 &= \frac{1 - \varphi_1}{2} (W_T^2(1)) - (1 + \varphi_1) \frac{\sum_{i=1}^T \mu_i^2}{2T} - \frac{\mu_T^2}{2T}. \\
 p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^T \mu_i^2}{2T} &= E(\Delta y_t)^2 / 2 = \frac{\sigma^2}{2(1 - \varphi_1^2)}, \\
 \left(\int_0^1 W_T^2(t) dt, \frac{1}{2} W_T^2(1) \right) &\Rightarrow \left(\int_0^1 \sigma^2 W^2(t) dt, \frac{1}{2} \sigma^2 W^2(1) \right). \\
 T \times (\hat{\rho} - 1) &\Rightarrow \frac{\frac{1 - \varphi_1}{2} (\sigma^2 (1 - \varphi_1)^{-2} W^2(1)) - (1 + \varphi_1) \left(\frac{\sigma^2}{2(1 - \varphi_1^2)} \right)}{\int_0^1 \sigma^2 (1 - \varphi_1)^{-2} W^2(t) dt} = \frac{(1 - \varphi_1)(W^2(1) - 1)}{2 \int_0^1 W^2(t) dt}, \\
 \frac{T \times (\hat{\rho} - 1)}{1 - \varphi_1} &\Rightarrow \frac{(W^2(1) - 1)}{2 \int_0^1 W^2(t) dt}.
 \end{aligned}$$

若用 $T \times (\hat{\rho} - 1)$ 除以 $1 - \varphi_1 = B(1)$, 就获得具有通常 Dickey-Fuller 估计量分布的检验统计量 $t_{\hat{\rho}}$ 。这样, 关于 ADF 的 t 检验统计量 $t(\hat{\rho})$ 并不需要任何调整。

考虑滞后阶数为 p , ($p > 1$) 的情况:

在 $H_0: \rho = 1$ 条件下, 则有: $(D(L)) \Delta y_t = \varepsilon_t$, $\Delta y_t = (D(L)^{-1}) \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$ 。

假设 $\{y_t\}$ 为只含有一个单位根的序列, 则 $\{\Delta y_t\}$ 为一平稳序列。

假设 $\sum_{j=1}^{\infty} j |b_j| < \infty$, 由 $B-N^{[9]}$ 分解得: $\sum_{i=1}^t \Delta y_i = b(1) \sum_{i=1}^t \varepsilon_i + \eta_t - \eta_0$ 。

其中 $b(1) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j$, $\eta_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$, $a_j = - \sum_{i=0}^{\infty} b_{j-i}$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| < \infty$ 。

$$\frac{y_t}{\sqrt{T}} = b(1) \sum_{i=1}^t \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{T}} + \frac{\eta_t - \eta_0}{\sqrt{T}} = b(1) \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{T \cdot \frac{t}{T}} \varepsilon_i + \frac{\eta_t - \eta_0}{\sqrt{T}} = b(1) W_T \left(\frac{t}{T} \right) + O_p \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right).$$

$$\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{y_{i-1}}{\sqrt{T}} = b(1) \int_0^1 W_T(t) dt + O_p(1).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_{t-1}}{\sqrt{T}} \right)^2 = b^2(1) \int_0^1 W_T^2(t) dt + O_p(1). \\
\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{t-1} \epsilon_t &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t (b(1) \sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i + \eta_{t-1} - \eta_0 + y_0) = \\
&= b(1) \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t \sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t \eta_{t-1} + (y_0 - \eta_0) \frac{\sum_{t=1}^T \epsilon_t}{T} = \\
&= b(1) \frac{1}{2} (W_T^2(1) - \sigma^2) + O_p(1). \left(\text{因为 } \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \epsilon_t \sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \epsilon_t \right)^2 - \frac{\sum_{t=1}^T \epsilon_t^2}{2T} \right) \\
&\left(\int_0^1 W_T^2(t) dt, \frac{1}{2} W_T^2(1) \right) \Rightarrow \left(\int_0^1 \sigma^2 W^2(t) dt, \frac{1}{2} \sigma^2 W^2(1) \right), \\
T \cdot (\hat{\rho} - 1) &= \frac{T^{-1} \sum_{t=2}^T y_{t-1} \epsilon_t}{T^{-2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2} \Rightarrow \frac{b(1)(W^2(1) - 1)}{2b^2(1) \int_0^1 W^2(t) dt}, \text{ 则有 } \frac{T \cdot (\hat{\rho} - 1)}{D(1)} \Rightarrow \frac{(W^2(1) - 1)}{2 \int_0^1 W^2(t) dt}.
\end{aligned}$$

所以,若用 $T \times (\hat{\rho} - 1)$ 除以 $1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_p = D(1)$,就获得具有通常 Dickey-Fuller 估计量分布的检验统计量 $t_{\hat{\rho}}$,而关于 ADF 的 t -检验统计量 $t(\hat{\rho})$ 并不需要任何调整。

2 EGARCH 条件下的单位根检验

为了扩大 EGARCH 模型的应用, Nelson 提出随机扰动 e_t 服从零均值和单位方差的广义误差分布,其密度函数:

$$f(x; c) = \frac{c \exp[-(1/2)|x/\lambda|^c]}{\lambda 2^{[(c+1)/c]} \Gamma(1/c)},$$

其中 c 是一个正的参数, λ 为常数, 且

$$\begin{aligned}
\lambda &= \left[\frac{2^{(-2/c)} \Gamma(1/c)}{\Gamma(3/c)} \right]^{1/2} \\
E |e_t| &= \frac{\lambda 2^{1/c} \Gamma(2/c)}{\Gamma(1/c)}.
\end{aligned}$$

当 $c = 2$ 时, 有 $E |e_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 。

当 $c = 2, \lambda = 1$ 时, e_t 服从标准正态分布。当 $0 < c < 2$, 其密度函数比正态分布有更厚的尾部, 其峰态系数大于 3; 而当 $c > 0$, 其密度函数比正态分布有更薄的尾部, GED 分布的优点在于, 在密度函数中加入尾部厚度指标 c , 以便研究密度函数相似尾部厚薄不同的一族分布, 从而便于对厚尾特征不同的金融数据进行细化研究。

考虑 AR(1)-EGARCH(1,1)-norm 模型:

$$\begin{aligned}
y_t &= \rho y_{t-1} + \epsilon_t, \text{ 且 } \epsilon_t = e_t \sigma_t \\
\ln \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \theta \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma \left(\left| \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}$$

检验 $H_0: \rho = 1, H_1: \rho < 1$

检验所使用的统计量为 $t(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\rho} - 1}{S(\hat{\rho})}, \hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^T y_t^2}, t_{\hat{\rho}} = T(\hat{\rho} - 1), S(\hat{\rho})$ 为 $\hat{\rho}$ 的标准差。

考虑数据生成过程: $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$, 且 $\epsilon_t = e_t \sigma_t$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \theta \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \gamma \left(\left| \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta_1 \ln \sigma_{t-1}^2$$

对该数据生成过程分别产生样本量为 25,50,100,250,500,1 000 的数据,重复次数为 2 万次,根据产生的 $\{y_t\}$ 序列运用加权最小二乘估计法计算 $t(\hat{\rho}), t_{\hat{\rho}}$ 统计量的值。

表 1 给出了上述模型对于不同参数向量的 $t(\hat{\rho}), t_{\hat{\rho}}$ 统计量的临界值。为方便记 $w1:\alpha_0 = 0, \theta = 0.2, \gamma = 0.1, \beta_1 = 0.8; w2:\alpha_0 = 0, \theta = -0.2, \gamma = 0.1, \beta_1 = 0.8; w3:\alpha_0 = 0, \theta = 0.2, \gamma = 0.2, \beta_1 = 0.8; w4:\alpha_0 = 0, \theta = 0.2, \gamma = 0.1, \beta_1 = 0.7$ 。

表 1 对应 $w1 \sim w4$ 统计量的 $t(\hat{\rho}), t_{\hat{\rho}}$ 临界值表
Table 1 Critical values simulation of statistics $t(\hat{\rho})$ and $t_{\hat{\rho}}$ correspond to $w1 \sim w4$

检验统 计量	样本 容量 T	0.01				0.025			
		$w1$	$w2$	$w3$	$w4$	$w1$	$w2$	$w3$	$w4$
$t(\hat{\rho})$	25	-2.689	-2.703	-2.645	-2.719	-2.275	-2.311	-2.258	-2.260
	50	-2.580	-2.604	-2.610	-2.586	-2.250	-2.249	-2.261	-2.246
	100	-2.577	-2.596	-2.640	-2.585	-2.252	-2.254	-2.253	-2.235
	250	-2.589	-2.620	-2.565	-2.618	-2.244	-2.236	-2.232	-2.272
	500	-2.574	-2.579	-2.589	-2.575	-2.222	-2.208	-2.245	-2.251
	1 000	-2.591	-2.599	-2.587	-2.584	-2.257	-2.236	-2.213	-2.256
$t_{\hat{\rho}}$	25	-11.169	-11.184	-11.136	-11.218	-8.592	-8.617	-8.851	-8.632
	50	-12.034	-11.628	-12.363	-11.877	-9.326	-9.028	-9.747	-9.299
	100	-12.779	-12.545	-13.359	-12.636	-9.904	-9.407	-10.185	-9.774
	250	-12.786	-12.054	-13.015	-13.132	-9.904	-9.113	-9.961	-10.012
	500	-12.780	-11.870	-13.113	-13.184	-9.850	-8.900	-10.052	-10.004
	1 000	-12.472	-11.156	-12.344	-12.314	-9.477	-8.474	-9.233	-9.686

检验统 计量	样本 容量 T	0.05				0.10			
		$w1$	$w2$	$w3$	$w4$	$w1$	$w2$	$w3$	$w4$
$t(\hat{\rho})$	25	-1.963	-1.980	-1.947	-1.963	-1.605	-1.619	-1.589	-1.606
	50	-1.960	-1.957	-1.974	-1.935	-1.619	-1.607	-1.633	-1.607
	100	-1.947	-1.953	-1.943	-1.947	-1.621	-1.632	-1.615	-1.623
	250	-1.951	-1.938	-1.956	-1.961	-1.633	-1.613	-1.625	-1.616
	500	-1.945	-1.926	-1.942	-1.945	-1.630	-1.602	-1.610	-1.609
	1 000	-1.955	-1.928	-1.929	-1.961	-1.619	-1.602	-1.613	-1.625
$t_{\hat{\rho}}$	25	-6.691	-6.665	-6.900	-6.695	-4.793	-4.763	-4.954	-4.771
	50	-7.243	-6.962	-7.618	-7.098	-5.229	-4.969	-5.425	-5.120
	100	-7.515	-7.216	-7.721	-7.559	-5.341	-5.137	-5.540	-5.438
	250	-7.575	-6.926	-7.741	-7.730	-5.439	-4.909	-5.498	-5.389
	500	-7.574	-6.941	-7.782	-7.742	-5.384	-4.866	-5.461	-5.392
	1 000	-7.155	-6.413	-7.132	-7.252	-5.100	-4.530	-5.025	-5.129

从表 1 中可以看出,参数的改变并不会对统计量产生较大影响。与标准的 ADF 单位根检验统计量的分位数相比较,对具有 AR(1)-EGARCH(1,1) 正态误差项的时间序列,对于 $t(\hat{\rho})$ 统计量,其不同情形下临界值波动较小,与标准的 ADF 单位根检验的分位数差异均在容许范围,因而对于各类情况,可以参考使用 ADF 检验临界值表。但对 $t_{\hat{\rho}}$ 统计量,其分位数在不同的参数设定条件下,相对于标准 ADF 单位根检验的临界值有较大的偏离,且波动幅度较大。由此所得的提示是,在多数情形下,金融时序数据的单位根检验应当谨慎使用 ADF 检验临界值表。为了比较运用这两个统计量的效果,不妨以标准 ADF 临界值作为基准分数线,重复模拟为 2 万次,找出相应的实际显著性水平,以此来考察标准 ADF 临界值的有效性。

表 2 给出了实际显著性水平扭曲的结果,发现统计量 $t(\hat{\rho})$ 对应的显著水平与给定的显著性水平较吻

合,其不同情形下波动较小,因而对于各类情况,运用统计量 $t(\hat{\rho})$ 进行推断,可以直接使用 ADF 检验临界值表。而 $t_{\hat{\rho}}$ 在不同的参数设定条件下,相对于给定的显著性水平有较大的偏离,且波动幅度较大;特别是样本容量为1 000 时,这种现象更为突出。在多数情形下,金融时序数据的单位根检验应当谨慎使用 ADF 检验中 $t_{\hat{\rho}}$ 的临界值表。从获得的实际显著水平扭曲结果来看,统计量 $t_{\hat{\rho}}$ 过度拒绝了单位根过程。在不知道序列是否异方差的条件下,选择 $t(\hat{\rho})$ 统计量比选择 $t_{\hat{\rho}}$ 来进行单位根检验更好。

表 2 实际显著水平扭曲随机模拟

Table 2 Simulation of actual distortion level

检验统 计量	样本 容量 T	0.01				0.025			
		$w1$	$w2$	$w3$	$w4$	$w1$	$w2$	$w3$	$w4$
$t(\hat{\rho})$	25	0.010 8	0.011 0	0.097 5	0.011 4	0.026 0	0.028 0	0.024 8	0.026 5
	50	0.009 1	0.009 1	0.009 6	0.009 2	0.025 1	0.024 9	0.025 8	0.024 8
	100	0.009 3	0.009 9	0.011 4	0.009 4	0.025 9	0.025 4	0.025 9	0.024 8
	250	0.010 2	0.011 0	0.009 7	0.011 4	0.025 9	0.025 6	0.025 2	0.027 9
	500	0.009 9	0.010 0	0.010 2	0.009 8	0.024 6	0.023 5	0.026 2	0.026 1
	1 000	0.010 7	0.010 3	0.010 2	0.010 1	0.026 7	0.025 4	0.023 8	0.027 0
$t_{\hat{\rho}}$	25	0.008 2	0.007 7	0.008 0	0.008 0	0.018 8	0.020 0	0.021 3	0.019 0
	50	0.007 3	0.006 2	0.008 5	0.007 0	0.020 1	0.018 2	0.024 2	0.020 9
	100	0.008 8	0.007 7	0.010 1	0.008 0	0.022 8	0.020 3	0.024 9	0.021 1
	250	0.007 9	0.006 6	0.008 7	0.008 6	0.022 9	0.017 6	0.022 5	0.229 0
	500	0.008 2	0.005 9	0.008 4	0.008 3	0.021 1	0.015 3	0.022 7	0.022 5
	1 000	0.006 3	0.004 6	0.006 7	0.006 6	0.018 3	0.012 4	0.016 5	0.018 7

检验统 计量	样本 容量 T	0.05				0.10			
		$w1$	$w2$	$w3$	$w4$	$w1$	$w2$	$w3$	$w4$
$t(\hat{\rho})$	25	0.051 5	0.052 6	0.049 7	0.051 7	0.101 4	0.103 9	0.098 3	0.101 5
	50	0.051 3	0.050 6	0.052 7	0.048 3	0.101 8	0.099 6	0.104 3	0.099 6
	100	0.049 6	0.050 3	0.049 3	0.050 0	0.102 0	0.104 9	0.101 2	0.102 3
	250	0.050 1	0.048 1	0.050 9	0.051 4	0.102 5	0.098 8	0.100 5	0.099 3
	500	0.049 1	0.047 5	0.048 8	0.049 7	0.102 6	0.096 4	0.098 3	0.098 2
	1 000	0.050 7	0.048 3	0.047 8	0.051 2	0.100 0	0.096 6	0.098 6	0.101 6
$t_{\hat{\rho}}$	25	0.040 8	0.039 9	0.042 3	0.040 0	0.083 4	0.083 3	0.089 5	0.082 1
	50	0.043 2	0.039 5	0.048 9	0.040 6	0.090 3	0.082 1	0.097 9	0.087 8
	100	0.044 6	0.039 3	0.047 5	0.045 3	0.091 6	0.084 5	0.098 1	0.094 4
	250	0.043 9	0.035 3	0.047 0	0.046 2	0.093 5	0.075 8	0.093 8	0.091 1
	500	0.043 4	0.035 0	0.046 8	0.046 5	0.091 0	0.075 9	0.092 5	0.091 0
	1 000	0.037 5	0.027 7	0.035 8	0.040 0	0.078 8	0.064 6	0.080 7	0.082 2

为了进一步考证检验这两个统计量的特性,对于 $y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t$,考察名义水平为 0.05 时得到的势(表 3),可以看出,相对而言当 ρ 远离 1 时, $t(\hat{\rho})$ 和 $t_{\hat{\rho}}$ 有较高的势。当 $\rho \rightarrow 1$ 时,得到的势较低。

表 3 势(名义检验水平为 0.05,样本量为 250)

Table 3 Power(nominal test level is 0.05, sample size is 250)

系数 ρ	$w1$		$w2$		$w3$		$w4$	
	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$
0.90	0.999 8	0.999 9	0.999 6	0.999 9	0.999 7	0.999 9	0.999 7	0.999 9
0.95	0.918 3	0.908 3	0.945 1	0.917 7	0.898 0	0.902 4	0.911 9	0.905 1
0.98	0.348 8	0.302 2	0.414 4	0.289 0	0.333 8	0.304 8	0.339 7	0.302 8
0.999 9	0.050 5	0.043 4	0.050 4	0.037 7	0.050 5	0.045 9	0.051 6	0.045 1

对于模型 $y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \varphi_j \Delta y_{t-j} + \epsilon_t$ 分析滞后阶数给临界值带来的影响。考虑下列情形：

1) $\varphi_j = 0(j = 1, \cdots, k)$;

2) $\varphi_1 = 0.6, \varphi_j = 0(j = 2, \cdots, k)$;

3) $\varphi_1 = -0.6, \varphi_j = 0(j = 2, \cdots, k)$;

4) $\varphi_1 = 0.4, \varphi_2 = 0.2, \varphi_j = 0(j = 3, \cdots, k)$ 。

从表 4 中可以看出,不同的滞后阶数对统计量有一定的影响,用检验统计量 $t(\hat{\rho})$ 比用 $t_{\hat{\rho}}$ 的稳健性更好。特别当显著性水平较大时, $t(\hat{\rho})$ 统计量的变动较小而且与参考的 ADF 临界值接近。

表 4 统计量的临界值表
Table 4 Critical value of statistics

滞后情形	0.01		0.025		0.05		0.10	
	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$	$t(\hat{\rho})$	$t_{\hat{\rho}}$
1)	-2.583	-13.230	-2.250	-10.229	-1.966	-7.922	-1.620	-5.541
2)	-2.518	-13.120	-2.218	-10.292	-1.956	-8.126	-1.639	-5.730
3)	-2.601	-13.700	-2.257	-10.365	-1.971	-7.985	-1.645	-5.715
4)	-2.573	-13.482	-2.249	-10.373	-1.957	-7.951	-1.628	-5.708

3 结 语

在泛函中心极限定理基础上,给出了带有滞后阶序列的检验统计量的极限分布及其证明,发现对于单整序列无论带有 AR 类序列还是 MA 类序列滞后项,都可以采用统计量 $t_{\hat{\rho}}$ 和 $t(\hat{\rho})$ 进行单位根检验。

由于异方差时间序列 EGARCH 过程能较好地描述大量金融时间序列,从随机模拟的角度分析了在有限样本情况下具有 EGARCH-norm 误差项时间序列的 ADF 单位根检验问题,从中得到了如下结论：

- 1) 在不同的情形下(包括模型不同的系数、不同的显著水平,带有不同的 AR 类滞后阶数等),常用的检验统计量有着不同的分位数水平,采用标准的单位根检验表必须慎重；
- 2) 在高频金融时间序列数据的单位根检验中,即使设定相同的数据生成过程,相对而言 $t_{\hat{\rho}}$ 检验统计量比 $t(\hat{\rho})$ 不适合运用于金融时序数据的单位根检验。

参考文献：

[1] 王莉莉,彭作祥. 具有 GJR-GARCH 误差项时序的 ADF 单位根检验[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2005,30(6):992-996.

[2] STEVEN C. Joint maximum likelihood estimation of unit root testing equations and GARCH processes: Some finite-sample issues[J]. Mathematics and Computers in Simulation,2008,77(1):109-116.

[3] 王淑良. 具有 EGARCH-SGED 误差项的时序的单位根检验[J]. 山东理工大学学报:自然科学版,2007,21(2):56-59,63.

[4] BRANDT M W, JONES C S. Volatility Forecasting With Range-Based EGARCH Models[J]. Journal of Business & Economic Statistics,2006,24(4):470-486.

[5] 戴晓枫,肖庆宪. 时间序列分析方法及人民币汇率预测的应用研究[J]. 上海理工大学学报,2005,27(4):341-344.

[6] 李亚静,朱宏泉,彭育威. 基于 GARCH 模型族的中国股市波动性预测[J]. 数学的实践与认识,2003(11):65-71.

[7] 张世英,樊智. 协整理论与波动模型[M]. 北京:清华大学出版社,2004:20-21.

[8] DICKEY D A, FULLER M A. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root[J]. Econometrica,1981,49(4):1057-1072.

[9] BEVERIDGE S, NELSON C R. A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory component with particular attention to measurement of the business cycle[J]. Journal of Monetary Economics, 1981(7):151-174.