浙江科技学院学报,第 23 卷第 1 期,2011 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 1, Feb. 2011

DOI: 10.3969/j.issn.1671-8798.2011.01.001

一类算子在非倍测度的广义 Morrey 空间上的有界性

郑涛涛[1],张松艳[2]

(1. 宁波大学 理学院,浙江 宁波 315010;2. 浙江科技学院 经济管理学院,杭州 310023)

摘　要:在 R^d 空间上的 Radon 测度 μ 不满足双倍条件的情况下,一些奇异积分算子在某些空间的有界性仍然成立。现通过球层分解的方法,证明了多线性 Calderón-Zygmund 算子 $T(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 在非倍测度的乘积广义 Morrey 空间 $L^{p_1,\phi_1} \times L^{p_2,\phi_2} \times \cdots \times L^{p_m,\phi_m}$ 上的有界性,并将奇异积分算子在广义 Morrey 空间上的有界性进行了推广。

关键词:Calderón-Zygmund 算子;广义 Morrey 空间;非倍测度;多线性

中图分类号:O174.3　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1671-8798(2011)01-0001-05

Boundedness of a class of operators over generalized morrey spaces with non-doubling measures

ZHENG Tao-tao[1], ZHANG Song-yan[2]

(1. Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2. School of Economics and Management, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Let μ be a Radon measure on R^d which may be non-doubling, there are some singular integral operators bounded in some spaces. We have proved that the multilinear Calderón-Zygmund operator $T(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ is bounded from the product generalized Morrey spaces $L^{p_1,\phi_1} \times L^{p_2,\phi_2} \times \cdots \times L^{p_m,\phi_m}$ to $L^{p,\phi}$. Furthermore, we extend the boundedness of singular integral operators over the generalized Morrey spaces.

Key words: Calderón-Zygmund operator; generalized Morrey spaces; non-doubling measures; multilinear

---

收稿日期:2010-06-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771110);宁波市自然科学基金资助项目(2009A610084);浙江科技学院科研启动基金项目(F501107905)

作者简介:郑涛涛(1984—　),男,江西万年人,硕士研究生,研究方向为调和分析。

通讯作者:张松艳,副教授,硕士,主要从事经济数学研究。

1 引言及主要结果

在经典调和分析中，一个关键的假设是测度 μ 满足双倍条件。所谓测度 μ 满足双倍条件是指存在某个常数 $C>0$，使得对任意的 $x\in \mathrm{supp}(\mu)$ 及 $r>0$，有 $\mu(B(x,2l))\leqslant C\mu(B(x,l))$，其中 $B(x,r)=\{y\in R^d:|x-y|<r\}$。1998 年，Nazarov，Treil 和 Volberg[1] 给出了在非双倍条件下有关 Calderón-Zygmund 算子的理论，且最近几年的研究[2-3] 表明，定义在欧氏空间 R^d 上的非负 Radon 测度 μ 不满足双倍条件而仅满足增长性条件时，许多经典的结果仍然成立。增长性条件即存在常数 $C_0>0$，使得对任意的 $x\in R^d$，$l>0$ 有

$$\mu(B(x,r))\leqslant C_0 l^n \tag{1}$$

n 为固定的数且 $0<n\leqslant d$。如果欧氏空间 R^d 上赋予的非负 Radon 测度 μ 仅满足增长性条件，则称此空间为非齐型空间。本文研究了非齐型空间 (R^d,μ) 上的多线性 Calderón-Zygmund 算子的有界性。

定义于 Schwartz 函数空间的 m 重乘积，取值于缓增分布空间的 m-线性算子 T：

$$T:S(R^n)\times\cdots\times S(R^n)\to S'(R^n)$$

T 带有一个 $(R^d)^{m+1}$ 空间上的分布核 $K(x,y_1,\cdots,y_m)$，其中 $K(x,y_1,\cdots,y_m)$ 是定义在 $(R^d)^{m+1}\backslash\{x=y_1=y_2\cdots=y_m\}$ 上，称 K 是一个 m-CZK(A,ε) 核，假如它满足下面的尺寸条件：当 $\{x,y_1,\cdots,y_m\}\in(R^n)^{m+1}$ 且 x 不等于某个 $y_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 时，

$$K(x,y_1,\cdots,y_m)\leqslant\frac{A}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn}} \tag{2}$$

并且满足正则性条件：

当 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}|x-y_k|\geqslant 2|x-x'|$ 时，

$$|K(x,y_1,\cdots,y_m)-K(x',y_1,\cdots,y_m)|\leqslant\frac{A|x-x'|^{\varepsilon}}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn+\varepsilon}} \tag{3}$$

以及对于任意满足 $1\leqslant k\leqslant m$ 的 k，当 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|x-y_j|\geqslant 2|y_k-y_k'|$ 时，

$$|K(x,y_1,\cdots,y_k,\cdots,y_m)-K(x,y_1,\cdots,y_k',\cdots,y_m)|\leqslant\frac{A|y_k-y_k'|^{\varepsilon}}{(|x-y_1|+\cdots+|x-y_m|)^{mn+\varepsilon}} \tag{4}$$

其中 $A>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1]$ 是 2 个常数。

若存在 $q_1,q_2,\cdots,q_m,q\in[1,\infty)$(其中 $1/q=\sum_{k=1}^{m}1/q_k$) 使得 T 是 $L^{q_1}(R^n)\times L^{q_2}(R^n)\times\cdots\times L^{q_m}(R^n)\to L^q(R^n)$ 的有界算子，且对于 $L^2(R^n)$ 中的函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 有

$$T(f_1,f_2,\cdots,f_m)(x)=\int_{(R^n)^m}K(x,y_1,y_2,\cdots y_m)\prod_{k=1}^{m}f_k(y_m)\mathrm{d}\mu(y_1)\mathrm{d}\mu(y_2)\cdots\mathrm{d}\mu(y_m) \tag{5}$$

成立，其中 $f_j(j=1,2,\cdots,m)$ 是具有紧支集的光滑函数且 $x\notin\bigcap\limits_{k=1}^{m}\mathrm{supp}f_k$，称 T 是以 K 为核的多线性 Calderón-Zygmund 算子。

当 $m=1$ 时，算子 T 就是经典的 Calderón-Zygmund 算子。当 $m\geqslant 2$ 时，Grafakos 和 Torres 在文献[4] 中考虑了当 $1\leqslant q_1,q_2,\cdots,q_m<\infty$ 时，算子 T 在空间 $L^{q_1}(R^n)\times L^{q_2}(R^n)\times\cdots\times L^{q_m}(R^n)$ 上的性质，并建立了这类算子的 $T1$ 型定理。

最近，Y. Sawano[5] 引入非倍测度的广义 Morrey 空间并证明了 Calderón-Zygmund 算子在该空间上的有界性，本文在此基础上证明了多线性 Calderón-Zygmund 算子在非倍测度的广义 Morrey 空间上的有界性。

本文中所有方体 $Q\subset R^d$ 均指各边平行于坐标轴的闭方体并记其边长为 $l(Q)$，中心为 x_Q，C 为常数，$\mathfrak{A}(\mu)$ 为所有满足 $\mu(Q)>0$ 的方体的全体。

定义 设 $1\leqslant p<\infty$，$\phi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个增函数，$k>1$，广义 Morrey 空间 $L^{p,\phi}(\mu)$ 的定义为

$$L^{p,\phi}(k,\mu)=\left\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu):\sup_{Q\in\mathfrak{A}(\mu)}\left(\frac{1}{\phi(\mu(kQ))}\int_Q|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}<\infty\right\},$$

f 在广义 Morrey 空间 $L^{p,\phi}(R^n)$ 上的范数：

$$\| f \|_{L^{p,\phi}(k,\mu)} = \sup_{Q\in\mathfrak{A}(\mu)} \left(\frac{1}{\phi(\mu(kQ))} \int_Q | f(x) |^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}。$$

命题 1[5]　设 $k_1 > k_2 > 1, 1 \leqslant p < \infty, \phi:(0,\infty) \to (0,\infty)$ 是一个增函数，则存在一个仅与 k_1, k_2, d 有关的常数 C_{d,k_1,k_2} 使得

$$\| f \|_{L^{p,\phi}(k_1,\mu)} \leqslant \| f \|_{L^{p,\phi}(k_2,\mu)} \leqslant C_{d,k_1,k_2} \left(\frac{k_2 - 1}{k_1 - 1} \right)^d \| f \|_{L^{p,\phi}(k_1,\mu)},$$

因此，$L^{p,\phi}(k_1,\mu)$ 与 $L^{p,\phi}(k_2,\mu)$ 的范数互相等价，记 $L^{p,\phi}(\mu) = L^{p,\phi}(2,\mu)$。

引理 1[5]　设 $1 < p_1 < \infty$，T 是一个满足式(2)，(3)，(4) 中 $m = 1$ 时的奇异积分算子，$Tf(x) = \int_{R^d} k(x,y) f(y) \mathrm{d}\mu(y)$。假设存在常数 C 使得

$$\frac{\phi(t)}{t} \leqslant C \frac{\phi(s)}{s} \quad (s \leqslant t), \tag{6}$$

$$\sup_{\substack{r,s>0 \\ r\leqslant s\leqslant 2r}} \frac{\phi(r)}{\phi(s)} < \infty, \tag{7}$$

$$\int_r^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant C \frac{\phi(r)}{r}, \tag{8}$$

则有 $\| Tf \|_{L^{p,\phi}(\mu)} \leqslant C \| f \|_{L^{p,\phi}(\mu)}$。

引理 2[6]　设 $1 < p_1, p_2, \cdots, p_m < \infty, (1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_m), f_i \in L^{p_i}(\mu)$ 在 $\| \mu \| < \infty$ 时有 $\int_{R^n} T(f_1, f_2, \cdots, f_m)(x) \mathrm{d}\mu(x) = 0$，若 $T(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 是一个 $L^1(\mu) \times L^1(\mu) \times \cdots \times L^1(\mu) \to L^{1/m,\infty}(\mu)$ 的有界算子，则存在常数 C 使得

$$\| T(f_1, f_2, \cdots, f_m) \|_{L^p(\mu)} \leqslant C \prod_{i=1}^m \| f_i \|_{L^{p_i}(\mu)}, \tag{9}$$

本文的主要定理：

定理 1　设 $1/p = 1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_m, p > 1$，$T$ 是一个如式(5) 定义的多线性奇异积分算子，$f_i \in L^{p_i,\phi_i}(\mu)$，假定 ϕ, ϕ_i（其中 $\phi = (\prod_{i=1}^m {\phi_i}^{1/p_i})^p (i = 1,2,\cdots,m)$）满足式(6)，(7) 及

$$\int_r^{+\infty} \frac{\phi_i(t)}{t^n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant C \frac{\phi_i(r)}{r^n}, \tag{10}$$

则存在与 f 无关的常数 $C > 0$，使得

$$\| T(f_1, f_2, \cdots, f_m) \|_{L^{p,\phi}(\mu)} \leqslant C \prod_{i=1}^m \| f_i \|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}。 \tag{11}$$

Remark 1　式(11) 中 $m = 1$ 时即为

$$\| T(f) \|_{L^{p,\phi}(\mu)} \leqslant C \| f \|_{L^{p,\phi}(\mu)},$$

定理 1 将包含文献[5] 中所证的关于 Calderón-Zygmund 奇异积分算子在广义 Morrey 空间上的有界性的结果。

2　定理的证明

不失一般性，取 $m = 2$ 的情况证明，$m > 2$ 的情况完全类似。

$$\text{分解 } f_i(x) = f_i(x)\chi_{2Q}(x) + f_i(x)\chi_{(2Q)^c}(x) \quad i = (1,2)$$

则有

$$\begin{aligned} | T(f_1, f_2)(x) | \leqslant & | T(f_1\chi_{2Q}, f_2\chi_{2Q})(x) | + | T(f_1\chi_{(2Q)^c}, f_2\chi_{(2Q)^c})(x) | + \\ & | T(f_1\chi_{(2Q)^c}, f_2\chi_{2Q})(x) | + | T(f_1\chi_{2Q}, f_2\chi_{(2Q)^c})(x) | = \end{aligned}$$

$$\gamma_1(x)+\gamma_2(x)+\gamma_3(x)+\gamma_4(x)。$$

下面分别对这四项进行估计。

首先对 $\gamma_1(x)$，利用式(9) 中 $T(f_1,f_2)$ 的有界性，

$$\begin{aligned}(\int_Q |T(f_1\chi_{2Q},f_2\chi_{2Q})|^p d\mu)^{1/p} &\leqslant C\|f_1\chi_{2Q}\|_{L^{p_1}(\mu)}\|f_2\chi_{2Q}\|_{L^{p_2}(\mu)}\leqslant\\ &C(\phi_1(\mu(2Q)))^{\frac{1}{p_1}}(\phi_2(\mu(2Q)))^{\frac{1}{p_2}}\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}\leqslant\\ &C(\phi(\mu(2Q)))^{\frac{1}{p}}\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)},\end{aligned}$$

因此有

$$\|\gamma_1(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}。\tag{12}$$

对 $\gamma_2(x)$，有 $x\in Q, y_i\in(2Q)^c$，记 C_Q 为 Q 的中心，根据多线性算子 T 的核的条件(2)

$$\begin{aligned}|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)| &\leqslant C\int_{(R^d\backslash 2Q)^2}\frac{f_1(y_1)f_2(y_2)}{(|y_2-x|+|y_1-x|)^{2n}}d\mu(y_1)d\mu(y_2)\leqslant\\ &C\prod_{i=1}^{2}\int_{R^d\backslash 2Q}\frac{f_i(y_i)}{|y_i-x|^n}d\mu(y_i)。\end{aligned}$$

利用等式 $n\int_0^\infty\frac{\chi_{B(x,l)}(y_i)}{l^{n+1}}dl=\frac{1}{|x-y_i|^n}$，并变换积分顺序

$$|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)|\leqslant C\prod_{i=1}^{2}\int_{2l(Q)}^{\infty}\frac{1}{l^{n+1}}(\int_{B(c_Q,l)}|f_i(y_i)|d\mu(y_i))dl。$$

利用 Hölder 不等式，增长性条件(1) 及(10)

$$\begin{aligned}|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)| &\leqslant C\prod_{i=1}^{2}\int_{2l(Q)}^{\infty}\frac{1}{l^{n+1}}(\int_{B(c_Q,l)}|f_i(y_i)|d\mu(y_i))^{1/p_i}\mu(B(C_Q,l))^{1-1/p_i}dl\leqslant\\ &C\prod_{i=1}^{2}\left(\int_{2l(Q)}^{\infty}\frac{\phi_i(cl^n)^{1/p_i}}{l^{n/p_i+1}}dl\cdot\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}\right)\leqslant C\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\phi_i(cl(Q)^n)}{l(Q)^n}\right)^{1/p_i}\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}。\end{aligned}$$

因为 ϕ_i 是一个满足 $\sup\limits_{\substack{r,s>0\\ r\leqslant s\leqslant 2r}}\frac{\phi_i(r)}{\phi_i(s)}<\infty$ 的倍函数，并且有$\frac{\phi_i(t)}{t}\leqslant C\frac{\phi_i(s)}{s}\quad(s\leqslant t)$，

所以

$$|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)|\leqslant C\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\phi_i(\mu(B(c_Q,2dl(Q))))}{\mu(B(c_Q,2dl(Q)))}\right)^{1/p_i}\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)},$$

并且可以得到：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\phi(\mu(2Q))}\int_Q|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{(2Q)^c})|^p d\mu\right)^{1/p}\leqslant\\ &\qquad C\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}\left(\frac{\mu(Q)}{\phi(\mu(2Q))}\times\frac{\phi(\mu(B(c_Q,2dl(Q))))}{\mu(B(c_Q,2dl(Q)))}\right)^{1/p_i}\leqslant\\ &\qquad C\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}\left(\frac{\mu(Q)}{\phi(\mu(2Q))}\times\frac{\phi(\mu(2Q))}{\mu(2Q)}\right)^{1/p_i}\leqslant C\prod_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L^{p_i,\phi_i}(\mu)}。\end{aligned}$$

从而

$$\|\gamma_2(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}。\tag{13}$$

对 $\gamma_3(x)$，有 $x\in Q, y_1\in 2Q, y_2\in(2Q)^c$，利用简单的几何估计及增长性条件(1) 可得

$$|x-y_2|\geqslant\frac{1}{2}l(Q)=\frac{1}{4}l(2Q),$$

$$\frac{1}{|x-y_2|^n}\leqslant 4^n\frac{1}{l(2Q)^n}\leqslant C_0 4^n\mu(2Q)^{-1}=C\mu(2Q)^{-1}。$$

从而对 $\gamma_3(x)$ 的估计利用 Hölder 不等式及式(10) 有

$$\begin{aligned}
&|T(f_1\chi_{2Q},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)|\leqslant\\
&\quad C\int_{R^d}|f_1(y_1)|\chi_{2Q}(y_1)\mathrm{d}\mu(y_1)\int_{R^d}\frac{|f_2(y_2)|\chi_{(2Q)^c}(y_2)}{|x-y_2|^{2n}}\mathrm{d}\mu(y_2)\leqslant\\
&\quad C\int_{2Q}|f_1(y_1)|\mathrm{d}\mu(y_1)\int_{R^d}\frac{|f_2(y_2)|\chi_{(2Q)^c}(y_2)}{|x-y_2|^n|x-y_2|^n}\mathrm{d}\mu(y_2)\leqslant\\
&\quad C\mu(2Q)^{1-1/p_1}\left(\int_{2Q}|f_1(y_1)|^{p_1}\mathrm{d}\mu(y_1)\right)^{1/p_1}\mu(2Q)^{-1}\int_{R^d}\frac{|f_2(y_2)|\chi_{(2Q)^c}(y_2)}{|x-y_2|^n}\mathrm{d}\mu(y_2)\leqslant\\
&\quad C\mu(2Q)^{-1/p_1}(\phi_1(\mu(2Q)))^{1/p_1}\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\left(\frac{\phi_2(\mu(B(c_Q,2dl(Q))))}{\mu(B(c_Q,2dl(Q)))}\right)^{1/p_2}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}\leqslant\\
&\quad C\left(\frac{\phi_1(\mu(2Q))}{\mu(2Q)}\right)^{1/p_1}\left(\frac{\phi_2(\mu(B(c_Q,2dl(Q))))}{\mu(B(c_Q,2dl(Q)))}\right)^{1/p_2}\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}\leqslant\\
&\quad C\left(\frac{\phi(\mu(2Q)))}{\mu(2Q)}\right)^{1/p}\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)},
\end{aligned}$$

则 $\gamma_3(x)$ 有

$$\|\gamma_3(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}。\tag{14}$$

$\gamma_4(x)$ 的估计与 $\gamma_3(x)$ 类似，根据 $|T(f_1\chi_{(2Q)^c},f_2\chi_{2Q})(x)|$ 与 $|T(f_1\chi_{2Q},f_2\chi_{(2Q)^c})(x)|$ 的对称性可得

$$\|\gamma_4(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\leqslant C\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}。\tag{15}$$

从而根据式(12)～式(15)的估计有

$$\begin{aligned}
&\|T(f_1,f_2)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\leqslant\\
&\quad C(\|\gamma_1(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}+\|\gamma_2(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}+\|\gamma_3(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)}+\|\gamma_4(x)\|_{L^{p,\phi}(\mu)})\leqslant\\
&\quad C\|f_1\|_{L^{p_1,\phi_1}(\mu)}\|f_2\|_{L^{p_2,\phi_2}(\mu)}。
\end{aligned}$$

定理证毕。

参考文献：

[1] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderón-Zygmund operators in nonhomogeneous spaces[J]. Internat Math Res, 1998(9): 463-487.

[2] TOLSA X. BMO, H^1 and Calderón-Zygmund operators for non-doubling measures[J]. Math Ann, 2001, 319(1): 89-149.

[3] SHI Yan-long, TAO Xiang-xing. Multilinear risez potential operators on Herz-type Spaces and generalized Morrey Spaces[J]. Hokkaido Mathematic Journal, 2009, 38(4): 635-662.

[4] GRAFAKOS L, TORRES R H. Multilinear Calderón-Zygmund theory[J]. Adv in Math, 2002, 165(1): 124-164.

[5] SAWANO Y. Generalized Morrey Spaces for non-doubling measures. Nonlinear differ[J]. Equ Appl, 2008, 15(4): 412-425.

[6] XU Jingshi. Boundedness of multilinear singular integrals for non-doubling measures[J]. J Math Anal Appl, 2007, 327(1): 471-480.