

两两 NQD 序列移动平均过程的矩完全收敛性

沈建伟

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 令 $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个双向无穷的非同分布两两 NQD 随机变量列且均值为零,方差有限。令 $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个绝对可加的实数列且 $X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i, k \geq 1$ 。在适当的条件下通过截尾及矩不等式得到了 $\left\{ \sum_{i=1}^n X_i / n^{1/p}, n \geq 1 \right\}$ 的矩完全收敛。

关键词: 移动平均过程;矩完全收敛;两两 NQD 列

中图分类号: O211.4

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2011)06-0445-07

Complete moment convergence of moving average processes for pairwise NQD sequences

SHEN Jian-wei

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Let $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ be a doubly infinite sequence of non-identically distributed and pairwise negatively quadrant dependent random variables with zero means and finite variances. Let $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ be an absolutely summable sequence of real numbers and $X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i, k \geq 1$. The complete moment convergence of $\left\{ \sum_{i=1}^n X_i / n^{1/p}, n \geq 1 \right\}$ under some suitable conditions are obtained by means of truncation and moment inequality.

Key words: moving average process; complete moment convergence; pairwise NQD sequences

1 引言和引理

设 $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ 为双向无穷随机变量序列,均值为零,方差有限。令 $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ 为一绝对可加的实数序列以及

$$X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{i+k} Y_i, k \geq 1. \quad (1)$$

在一些适当的条件下,对于线性过程 $\{X_k, k \geq 1\}$ 已获得了许多极限结果。Burton 等^[1]得到了 $\{X_k, k \geq 1\}$ 的大偏差定理, Li 等^[2]和 Zhang^[3]获得了完全收敛性方面的结果。Liang^[4]获得了关于 NA 列加权及移动平均过程的完全收敛性。

当 $\{X_k, k \geq 1\}$ 为一个 i. i. d. 随机变量序列且均值为零、方差有限, Chow^[5]获得了如下的完全矩收敛结果:

定理 A 假设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 为一个 i. i. d. 的随机变量序列, $EX_1 = 0$ 。对于 $1 \leq p < 2$ 和 $r > p$, 若 $E\{|X_1|^r + |X_1| \log(1 + |X_1|)\} < \infty$, 则对于 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} E\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| - \epsilon n^{1/p}\right\}^+ < \infty.$$

Li 等^[6]获得了同分布 NA 列移动平均过程的类似结果:

定理 B 假设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 定义如式(1), 其中 $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个绝对可加的实数列, $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个双向无穷的同分布 NA 随机变量序列满足 $EY_1 = 0, E|Y_1|^2 < \infty$ 。令 $h(x) > 0 (x > 0)$ 为缓变函数, $1 \leq p < 2, r > 1 + p/2$ 。若 $E|Y_1|^r h(|Y_1|^p) < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| - \epsilon n^{1/p}\right\}^+ < \infty, \text{ 对于 } \forall \epsilon > 0.$$

Kim 等^[7]把结果推广到了同分布的 φ -混合序列情形。

笔者把结果推广到了不同分布的两两 NQD 序列情形。下面给出一些定义和相关的引理:

定义 1^[8] 称随机变量 X 和 Y 是 NQD (negatively quadrant dependent) 的, 若对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 都有

$$P(X < x, Y < y) \leq P(X < x)P(Y < y),$$

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两 NQD 的, 若对 $\forall i \neq j, X_i$ 与 X_j 是 NQD 的。

定义 2 称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是关于随机变量 X 一致有界的, 若对于 $\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, 有 $P\{|X_n| > t\} \leq cP\{|X| > t\}$, 此处 c 是一个正常数。

引理 1^[1] 设 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$ 是绝对可加的实数级数, 记 $a = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i$, 对 $k \geq 1$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=i+1}^{i+n} a_j \right|^k = |a|^k.$$

引理 2^[8] 设随机变量 X 和 Y 是 NQD 的, 则

(i) $EXY \leq EXEY$;

(ii) $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) 若 f, g 同为非降(或非增)函数, 则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为 NQD 的。

引理 3^[9] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两 NQD 序列, 且 $EX_n^2 < \infty, \forall n \geq 1$, 则有

$$E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n EX_i^2.$$

引理 4^[10] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是任意随机序列。若存在某随机变量 X , 使对任意 $x > 0$ 及 $n \geq 1$, 有 $P\{|X_n| \geq x\} \leq cP\{|X| \geq x\}$, 则对 $\forall \beta > 0, \forall t > 0$ 有

$$E|X_n|^\beta I(|X_n| \leq t) \leq c(E|X|^\beta I(|X| \leq t) + t^\beta P\{|X| > t\}),$$

$$E|X_n|^\beta I(|X_n| > t) \leq cE|X|^\beta I(|X| > t).$$

文中总设 c 代表正常数, 在不同的地方可以代表不同的值。为行文方便, $a_n \ll b_n$ 意味着 $a_n = O(b_n)$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

2 主要结果及证明

定理 1 假设 $\{X_k, k \geq 1\}$ 定义如式(1), 其中 $\{a_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个绝对可加的实数列, $\{Y_i, -\infty < i < \infty\}$ 是一个关于随机变量 Y 一致有界的两两 NQD 序列且满足 $EY_i = 0, -\infty < i < \infty$ 。令 $h(x) > 0 (x > 0)$ 为缓变函数, $1 \leq p < r < 2$ 。若 $E|Y|^r h(|Y|^p) < \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\{|S_n| - \epsilon n^{1/p}\}^+ < \infty, \text{ 对于 } \forall \epsilon > 0 \quad (2)$$

此处 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n \geq 1$ 。

注 1 令 $a_{i+k} = 1, i = k; a_{i+k} = 0, i \neq k, 1 \leq k \leq n$, 则 $X_k = Y_k, S_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i$ 。

在一些适当的条件下, 当 $\{X_k, k \geq 1\}$ 是两两 NQD 随机变量列时式(2) 仍成立。

注 2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\{|S_n| - \epsilon n^{1/p}\}^+ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_0^{\infty} P\{|S_n| - \epsilon n^{1/p} \geq x\} dx = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) P\{|S_n| \geq (\epsilon + y)n^{1/p}\} n^{1/p} dy = \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\{|S_n| \geq (\epsilon + y)n^{1/p}\} dy < \infty \end{aligned} \quad (3)$$

从式(3) 可知, 矩完全收敛性蕴含了完全收敛性。即在定理 1 的条件下, 式(2) 蕴含了

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2} h(n) P\{|S_n| \geq \epsilon n^{1/p}\} < \infty, \text{ 对于 } \forall \epsilon > 0。$$

注 3 比较定理 1 与定理 B 中有关 r 的限制, 当 $r < 2$ 时, 可用定理 1 中的条件 $r > p$ 替代定理 B 中的条件 $r > 1 + p/2$, 此时放宽了 r 的取值范围。

证明

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{i+k} Y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} Y_i, \text{ 此处 } a_{ni} = \sum_{k=1}^n a_{i+k}$$

注意到 $a_{ni} = a_{ni}^+ - a_{ni}^-, a_{ni}^+ = \max\{0, a_{ni}\}, a_{ni}^- = \max\{0, -a_{ni}\}$, 于是

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} Y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^+ Y_i - \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^- Y_i$$

由于 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^+ Y_i$ 与 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni}^- Y_i$ 的收敛性完全类似, 故只讨论第一种情况。

不失一般性, 令 $a_{ni} > 0$, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}, -\infty < i < \infty$ 。

对于 $x > n^{1/p}$, 令

$$a_{ni} T_i = -x I(a_{ni} Y_i < -x) + a_{ni} Y_i I(|a_{ni} Y_i| \leq x) + x I(a_{ni} Y_i > x), S'_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} T_i$$

由引理 2 可知 $a_{ni} T_i$ 仍是两两 NQD。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) E\{|S_n| - \epsilon n^{1/p}\}^+ &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{\epsilon n^{1/p}}^{\infty} P\{|S_n| \geq x\} dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{|S_n| \geq \epsilon x\} dx \leq \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} (P\{\sup_i |a_{ni} Y_i| > x\} + P\{|S'_n| \geq \epsilon x\}) dx \end{aligned}$$

要证明式(2) 成立, 只需要证明

$$I_1 = : \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{\sup_i |a_{ni} Y_i| > x\} dx < \infty \quad (4)$$

和

$$I_2 = : \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{|S'_n| \geq \epsilon x\} dx < \infty. \quad (5)$$

首先估计 I_1 。

由引理 1, 对于充分大的 n , 有 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}|^k \leq cn, \forall k \geq 1$. 不失一般性, 令 $a_{ni} \leq 1$.

令 $I_{ni} = \{j \in \mathbb{Z} : (i+1)^{-1/p} < a_{nj} \leq i^{-1/p}\}, i = 1, 2, \dots$; 则 $\bigcup_{i \geq 1} I_{ni} = \mathbb{Z}$.

由文献[2]知

$$\sum_{i=1}^k \# I_{ni} \leq n(k+1)^{1/p}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{\sup_i |a_{ni} Y_i| > x\} dx \leq \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni} Y_i| > x\} dx \leq \\ &c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni} Y| > x\} dx \leq \\ &c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) P\{|Y| > x j^{1/p}\} dx \leq \\ &c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) \sum_{k \geq jx^p} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} dx \leq \\ &c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{k=[x^p]}^{\infty} n \left[\frac{k}{x^p} + 1 \right]^{1/p} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} dx \leq \\ &c \int_1^{\infty} t^{r/p-1-1/p} h(t) \int_{t^{1/p}}^{\infty} \sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p} x^{-1} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} dx dt \leq \\ &c \int_1^{\infty} y^{r-2} h(y^p) \int_y^{\infty} \sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p} x^{-1} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} dx dy (\text{令 } y = t^{1/p}) \leq \\ &c \int_1^{\infty} \sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p} x^{-1} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} \int_1^x y^{r-2} h(y^p) dy dx \leq \\ &c \int_1^{\infty} x^{r-2} h(x^p) \sum_{k=[x^p]}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} dx \leq \\ &c \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} \int_1^{(k+1)^{1/p}} x^{r-2} h(x^p) dx \leq \\ &c \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p} P\{k \leq |Y|^p < k+1\} (k+1)^{(r-1)/p} h(k+1) \leq \\ &c \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{r/p} h(k+1) P\{k \leq |Y|^p < k+1\} \leq \\ &E |Y|^r h(|Y|^p) < \infty. \end{aligned}$$

再来估计 I_2 , 利用引理 4, 对于 $1 \leq p < r < 2$

$$\begin{aligned} x^{-1} |ES'_n| &= x^{-1} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni} T_i \right| \leq \\ x^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |Ea_{ni} T_i| &= x^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |Ea_{ni} T_i - Ea_{ni} Y_i| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |E(a_{ni}Y_i + x)I(a_{ni}Y_i < -x) + E(a_{ni}Y_i - x)I(a_{ni}Y_i > x)| \leq \\
& x^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}Y_i|I(|a_{ni}Y_i| > x) \leq cx^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}Y|I(|a_{ni}Y| > x) \leq \\
& cx^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E|a_{ni}Y|^r x^{-(r-1)}I(|a_{ni}Y| > x) = \\
& cx^{-r} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}|^r E|Y|^r I(|a_{ni}Y| > x) \leq \\
& cx^{p-r} \rightarrow 0, \text{ 当 } x \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

因此, 对于充分大的 x , 有 $x^{-1} |ES'_n| < \epsilon/2$ 。

由引理 3 知

$$\begin{aligned}
E|S'_n - ES'_n|^2 &= E\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_{ni}T_i - Ea_{ni}T_i)\right|^2 \leq \\
&\sum_{i=-\infty}^{\infty} E(a_{ni}T_i)^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (E(a_{ni}Y_i)^2 I(|a_{ni}Y_i| \leq x) + Ex^2 I(|a_{ni}Y_i| > x)) = \\
&\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^2 P\{|a_{ni}Y_i| > x\} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni}^2 |Y_i|^2 I(|a_{ni}Y_i| \leq x).
\end{aligned} \quad (8)$$

结合式(7)和式(8)可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{|S'_n| \geq \epsilon x\} dx \leq \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{|S'_n - ES'_n| + |ES'_n| \geq \epsilon x\} dx \leq \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \epsilon \int_{n^{1/p}}^{\infty} P\{|S'_n - ES'_n| \geq \epsilon x/2\} dx \leq \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} E|S'_n - ES'_n|^2 dx \leq \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}Y_i| > x\} dx + \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni}^2 |Y_i|^2 I(|a_{ni}Y_i| \leq x) dx = : c(I_{21} + I_{22}).
\end{aligned} \quad (9)$$

对于 I_{21} , 其证明类似于 I_1 , 不赘述。得 $I_{21} < \infty$ 。

由引理 4 可得

$$\begin{aligned}
I_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni}^2 |Y_i|^2 I(|a_{ni}Y_i| \leq x) dx \leq \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [Ea_{ni}^2 |Y|^2 I(|a_{ni}Y| \leq x) + x^2 P\{|a_{ni}Y| > x\}] dx = \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni}^2 |Y|^2 I(|a_{ni}Y| \leq x) dx + \\
&c \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} P\{|a_{ni}Y| > x\} dx = : c(I'_{22} + I''_{22})
\end{aligned}$$

对于 I''_{22} , 其证明类似于 I_1 , 不赘述。得 $I''_{22} < \infty$ 。

$$\begin{aligned}
I'_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ea_{ni}^2 |Y|^2 I(|a_{ni}Y| \leq x) dx \leq \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nj}} j^{-2/p} E|Y|^2 I(|Y|^p \leq (x^p(j+1))) dx \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \sum_{k=0}^{x^p(j+1)-1} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \leq \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \sum_{k=[2x^p]+1}^{[x^p(j+1)]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx =: \\
& I'_{221} + I'_{222}.
\end{aligned}$$

下面估计 I'_{221}, I'_{222} 。由文献[3]知: $\sum_{j=m}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \leq cnm^{-1/p}$ 。

若 $1 \leq p < r < 2$, 对于 I'_{221} 可得

$$\begin{aligned}
I'_{221} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} nh(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \int_1^{\infty} t^{r/p-1-1/p} h(t) \int_{t^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx dt \ll \\
& \int_1^{\infty} x^{-2} \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \int_1^x y^{r-2} h(y^p) dy dx (\text{令 } y = t^{1/p}) \ll \\
& \int_1^{\infty} x^{r-3} h(x^p) \sum_{k=0}^{[2x^p]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \sum_{k=0}^{\infty} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \int_{(k/2)^{1/p}}^{\infty} x^{r-3} h(x^p) dx \ll \\
& \sum_{k=0}^{\infty} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) k^{(r-2)/p} h(k) \ll \\
& \sum_{k=0}^{\infty} k^{r/p} h(k) P(k < |Y|^p \leq k+1) \ll \\
& E |Y|^r h(|Y|^p) < \infty.
\end{aligned} \tag{12}$$

若 $1 \leq p < r < 2$, 对于 I'_{222} 可得

$$\begin{aligned}
I'_{222} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} \sum_{k=[2x^p]+1}^{[x^p(j+1)]} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \sum_{j=[k/x^p]-1}^{\infty} (\# I_{nj}) j^{-2/p} dx \ll \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{r/p-2-1/p} h(n) \int_{n^{1/p}}^{\infty} x^{-2} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} n \left(\frac{k}{x^p} \right)^{-1/p} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \int_1^{\infty} t^{r/p-1-1/p} h(t) \int_{t^{1/p}}^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-1/p} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx dt \ll \\
& \int_1^{\infty} x^{-1} \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-1/p} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \int_1^x y^{r-2} h(y^p) dy dx (\text{令 } y = t^{1/p}) \ll \\
& \int_1^{\infty} x^{r-2} h(x^p) \sum_{k=[2x^p]+1}^{\infty} k^{-1/p} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) dx \ll \\
& \sum_{k=0}^{\infty} k^{-1/p} E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \int_0^{(k/2)^{1/p}} x^{r-2} h(x^p) dx \ll
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} k^{(r-2)/p} h(k) E |Y|^2 I(k < |Y|^p \leq k+1) \ll \\
& \sum_{k=0}^{\infty} k^{r/p} h(k) P(k < |Y|^p \leq k+1) \ll \\
& E |Y|^r h(|Y|^p) < \infty.
\end{aligned} \tag{13}$$

由式(11)、式(12) 和式(13), 可得 $I_{22} < \infty$ 。 (14)

结合式(9)、式(10) 和式(14) 可知式(5) 成立。

综上所述, 定理 1 成立。

参考文献:

- [1] BURTON R M, DEHLING H. Large deviations for some weakly dependent random process[J]. Statist Probab Lett, 1990, 9(5): 397-401.
- [2] LI D L, RAO M B, WANG X C. Complete convergence of moving average processes[J]. Statist Probab Lett, 1992, 14(2): 111-114.
- [3] ZHANG L X. Complete convergence of moving average processes under dependence assumptions[J]. Statist Probab Lett, 1996, 30(2): 165-170.
- [4] LIANG H Y. Complete convergence for weighted sums of negatively associated random variables[J]. Statist Probab Lett, 2000, 48(4): 317-325.
- [5] CHOW Y S. On the rate of moment convergence of sample sums and extremes[J]. Bull Inst Math Acad Sinica, 1988, 16(3): 177-201.
- [6] LI Y X, ZHANG L X. Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions[J]. Statist Probab Lett, 2004, 70(3): 191-197.
- [7] KIM T S, KO M H. Complete moment convergence of moving average processes under dependence assumptions[J]. Statist Probab Lett, 2008, 78(7): 839-846.
- [8] LEHMANN E L. Some concepts of dependence [J]. Ann Math Statist, 1966, 37(5): 1137-1153.
- [9] 万成高. 两两 NQD 列的大数定律与完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 253-261.
- [10] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.