浙江科技学院学报,第 23 卷第 6 期,2011 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 6, Dec. 2011

DOI: 10.3969/j.issn.1671-8798.2011.06.003

# 带复合 Poisson 过程的分数 Black-Scholes 模型

闫传鹏
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

**摘　要**:利用对标的资产价格过程的一种逼近方法,建立了带复合 Poisson 过程的分数 Black-Scholes 模型,给出了其满足的随机微分方程,推广了已有的相关结论。

**关键词**:分数布朗运动;Black-Scholes 模型;鞅

**中图分类号**:O211.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2011)06-0452-04

# Fractional Black-Scholes model with compound Poisson process

YAN Chuan-peng
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract**: The Black-Scholes model with compound Poisson process is given by using an approximation method of the underlying assert price process. The stochastic differential equation is got and some conclusions are improved.

**Key words**: fractional Brownina motion; Black-Scholes model; martingale

在古典的 Black-Scholes 中假设资产价格服从几何布朗运动,但在实际的金融市场中发现,标的资产价格过程具有长期依赖性和自相似性。近年来,分数 Black-Scholes 模型作为古典的 Black-Scholes 模型的改进已经被提了出来[1-3],并利用 Wick 积建立了相关的随机积分。但是,由于 FBM 不具有鞅性,这样的市场存在无风险套利的机会,所以市场不再是完备的。T. H. Thao 在 2006 年给出了分数 Black-Scholes模型的一种逼近方法[4]。由于当重要信息到来时,资产价格会出现跳跃,而跳跃的幅度是随机的。因此,笔者利用文献[4]的方法,建立了带复合 Poisson 过程的分数 Black-Scholes 模型,给出了其满足的随机微分方程。

## 1　分数布朗运动

分数布朗运动是一个 Gauss 过程 $B^H=\{B_t^H:0\leqslant t\leqslant T\}$,其中 $H\in(0,1)$ 为 Hurst 指数,满足

$$E[B_t^H]=0$$

---

**收稿日期**:2011-07-01

**作者简介**:闫传鹏(1975—　),男,河南省商丘人,讲师,硕士,主要从事小波分析理论与金融数学研究。

和

$$R_H(s,t)=\frac{1}{2}(|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}),\ s,t\in[0,T]。$$

当 $H=\frac{1}{2}$ 时，则 $B_t^H$ 就是标准的布朗运动 $W_s$；当 $\frac{1}{2}<H<1$ 时，则 $B_t^H$ 具有长期依赖性[5]。而且 $B_t^H$ 具有如下形式：

$$B_t^H=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int_{-\infty}^{0}[(t-s)^\alpha-(-s)^\alpha]\mathrm{d}W_s+\int_0^t(t-s)^\alpha\mathrm{d}W_s\right\}$$

其中 $\alpha=H-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<H<1$。记 $B_t=\int_0^t(t-s)^\alpha\mathrm{d}W_s$，在分数随机积分中用 $B_t$ 代替 $B_t^H$，则分数 Black-Scholes 模型有如下形式：

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}B_t,0\leqslant t\leqslant T \tag{1}$$
$$S(0)=S_0$$

其中 $S_t$ 为股票价格，$\mu$，$\sigma$ 为常数。

由于 $B_t$ 不是半鞅，T. H. Thao 给出了如下一种逼近形式：

$$\mathrm{d}S^\varepsilon(t)=\mu S^\varepsilon(t)\mathrm{d}t+\sigma S^\varepsilon(t)\mathrm{d}B_t^\varepsilon,0\leqslant t\leqslant T \tag{2}$$
$$S^\varepsilon(0)=S_0$$

其中 $B_t^\varepsilon=\int_0^t(t-s+\varepsilon)^\alpha\mathrm{d}W_s$，$0<\alpha<\frac{1}{2}$。相关主要结论见文献[4]。

## 2　复合泊松过程

设 $N(t)$ 是强度为 $\lambda$ 的 Poisson 过程，$Y_1,Y_2,\cdots$ 是定义在概率空间 $(\Omega,F,P)$ 上的一列均值为 $\beta=EY_i$，独立同分布随机变量且独立于 $N(t)$。定义复合 Poisson 过程：

$$Q(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

设 $P(y_m)$ 表示跳跃幅度为 $y_m$ 的概率：$P(y_m)=P(Y_i=y_m)$，$m=1,\cdots,M$。假定对每个 $m$，$P(y_m)>0$，且 $\sum_{m=1}^{M}P(y_m)=1$。

设 $N_m(t)$ 是截止到 $t$ 时刻，$Q(t)$ 中幅度为 $y_m$ 的跳跃次数，则

$$N(t)=\sum_{i=1}^{M}N_i(t),\ Q(t)=\sum_{i=1}^{M}y_iN_i(t)$$

**定义 1**[5]　$Z_m(t)=\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_m^*)t}\left(\frac{\lambda_m^*}{\lambda_m}\right)^{N_m}$，$Z(t)=\prod_{m=1}^{M}Z_m(t)$，其中 $\lambda_m=\lambda P(y_m)$，$\beta_m$　$m=1,2,\cdots,M$ 为给定的非负实数。

**引理 1**[5]　$Z(t)$ 是鞅，且 $EZ(t)=1$，$\forall t\in(0,+\infty)$。

## 3　带复合泊松过程的分数 Black-Scholes 模型

在本文中，考虑的 $H\in\left(\frac{1}{2},1\right)$。

**定理 1**　假设股票的价格服从如下随机微分方程：

$$\mathrm{d}S^\varepsilon(t)=\mu S^\varepsilon(t)\mathrm{d}t+\sigma S^\varepsilon(t)\mathrm{d}B_t^\varepsilon+\mathrm{d}(Q(t)-\beta\lambda t) \tag{3}$$

则式(3) 的解为

$$S^\varepsilon(t)=S_0\exp((\mu-\beta\lambda t)-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^\alpha)^2t+\sigma B_t^\varepsilon))\prod_{n=1}^{N(t)}(1+Y_n)$$

证明：定义连续随机过程

$$X(t)=S_0\exp((\mu-\beta\lambda t)-\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^{\alpha})^2t+\sigma B_t^{\varepsilon}))$$

以及跳过程

$$J(t)=\prod_{n=1}^{N(t)}(1+Y_n)$$

因此，$S^{\varepsilon}(t)=X(t)J(t)$。下面证明 $S^{\varepsilon}(t)=X(t)J(t)$ 是式(3)的解。

由于 $B_t^{\varepsilon}=\alpha\varphi_t^{\varepsilon}+\varepsilon^{\alpha}W(t)$，其中 $\varphi_t^{\varepsilon}=\int_0^t(t-s+\varepsilon)^{\alpha-1}\mathrm{d}W(s)$，有 $\mathrm{d}X(t)=(\mu-\beta\lambda)X(t)+\sigma X(t)\mathrm{d}B_t^{\varepsilon}$。

在第 $i$ 次跳时刻，$J(t)=J(t-)(Y_i+1)$，则 $\Delta J(t)=J(t-)\Delta Q(t)$，$\mathrm{d}J(t)=J(t)\mathrm{d}Q(t)$。

由跳过程的伊藤乘积公式知

$$S^{\varepsilon}(t)=X(t)J(t)=S_0+\int_0^tX(s-)\mathrm{d}J(s)+\int_0^tJ(s)\mathrm{d}X(s)+[X,J](t)=$$

$$S_0+\int_0^tX(s-)J(s-)\mathrm{d}Q(s)+(\mu-\beta\lambda)\int_0^tJ(s)X(s)\mathrm{d}s+\sigma\int_0^tJ(s)X(s)\mathrm{d}B_t^{\varepsilon}$$

其微分为：

$$\mathrm{d}S^{\varepsilon}(t)=X(t-)J(t-)\mathrm{d}Q(t)+(\mu-\beta\lambda)J(t)X(t)+\sigma J(t)X(t)\mathrm{d}B_t^{\varepsilon}=$$

$$(\mu-\beta\lambda)S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t+\sigma S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}B_t^{\varepsilon}+S^{\varepsilon}(t-)\mathrm{d}Q(t)$$

下面，引入另一资产 $D(t)$，满足方程：

$$\mathrm{d}D(t)=r(t)D(t)\mathrm{d}t$$

**引理 2**[4] 对于 $S^{\varepsilon}(t)$，必存在风险中性测度 $P^*$，使得 $\exp^{-r(t)}S^{\varepsilon}(t)$ 在 $P^*$ 下是鞅。

**引理 3**[5] 在概率测度 $P^*$ 下，每个 $N_m$ 是强度为 $\lambda_m^*$ 的 Poisson 过程。

**定义 2**[5] $\lambda^*=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^*$，$p^*(y_m)=\frac{\lambda_m^*}{\lambda^*}$。

**引理 4**[5] 在 $P^*$ 下，$N(t)=\sum_{m=1}^{M}N_m(t)$ 是强度为 $\lambda^*$ 的 Poisson 过程，跳跃幅度 $Y_1,Y_2,\cdots$ 是独立同分布随机变量，满足 $P^*\{Y_i=y_m\}=p^*(y_m)$，并且 $Q(t)-\beta^*\lambda^*t$ 是一个鞅，其中：

$$\beta^*=E^*Y_i=\sum_{m=1}^{M}y_mp^*(y_m)=\frac{1}{\lambda^*}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m^*y_m。$$

记：$\xi_t=\frac{\mu+\alpha\sigma\varphi_t^{\varepsilon}-r(t)}{\sigma(t)}$，其中 $\sigma(t)=\sigma\varepsilon^{\alpha}$，$r(t)=(\alpha\sigma-\varepsilon^{\alpha+1})\varphi_t^{\varepsilon}$，则 $\xi_t$ 满足 Novikov 条件[4] $E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\xi_s^2\mathrm{d}s\right)<\infty$。$Z_0(t)=\exp(-\int_0^t\xi_s\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t\xi_s^2\mathrm{d}s)$，由哥萨诺夫定理知，在概率测度 $P^*=\int_AZ_0(T)\mathrm{d}P$ 下，$W^*(t)=W(t)+\int_0^t\xi_s\mathrm{d}s$ 是一个布朗运动。

**定义 3**[5] $P^{**}=\int_AZ(T)\mathrm{d}P\quad\forall A\in F$，其中 $Z(t)=Z_0(t)\prod_{m=1}^{M}Z_m(t)$。

由于概率测度 $P^{**}$ 是风险中性的，则在 $P^{**}$ 下股票的平均收益率为 $\rho$，即

$$\mathrm{d}S^{\varepsilon}(t)=(\mu-\beta\lambda+\sigma\alpha\varphi_t^{\varepsilon})S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t+\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}W(t)+S^{\varepsilon}(t-)\mathrm{d}Q(t)=$$

$$\rho S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}t+\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}W^*+S^{\varepsilon}(t-)\mathrm{d}(Q(t)-\beta^*\lambda^*t)=$$

$$(\rho-\beta^*\lambda^*+\sigma\varepsilon^{\alpha}\xi_t)\mathrm{d}t+\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)\mathrm{d}W(t)+S^{\varepsilon}(t-)\mathrm{d}Q(t)$$

等价于

$$\mu-\beta\lambda+\sigma\alpha\varphi_t^{\varepsilon}=\rho-\beta^*\lambda^*+\sigma\varepsilon^{\alpha}\xi_t，即\ \mu-\rho+\sigma\alpha\varphi_t^{\varepsilon}+\sigma\varepsilon^{\alpha}\xi_t=\beta\lambda-\beta^*\lambda^*=\sum_{m=1}^{M}(\lambda_m-\lambda_m^*)y_m$$

这是风险的市场价格过程。但只有一个方程，却有 $M$ 个未知量 $\lambda_m^*$，$m=1,2,\cdots,M$，所以存在的风险中性测

度并不唯一。为简单起见，假定已经选好 $\lambda_m^*$，$m=1,2,\cdots,M$。则有

$$dS^{\varepsilon}(t)=(\rho-\beta^*\lambda^*)dt+\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)dW^*(t)+S^{\varepsilon}(t-)dQ(t) \tag{4}$$

**定理 2**　标的资产 $S^{\varepsilon}(t)$ 的期权价格 $C(t,S^{\varepsilon}(t))$ 满足如下随机方程：

$$C_t+(r-\beta^*\lambda^*)S^{\varepsilon}(t)C_x+\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t))^2C_{xx}=rC-\lambda^*\sum_{m=1}^{M}[P^*(C(t,(y_m+1)S^{\varepsilon}(t)-C(t,S^{\varepsilon}(t))))]。$$

**证明**　由式(4)知股票价格的连续部分满足

$$dS_c^{\varepsilon}(t)=(\rho-\beta^*\lambda^*)dt+\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)dW^*(t)$$

所以，由伊藤公式可知：

$$\begin{aligned}&e^{-\rho t}C(t,S^{\varepsilon}(t))-C(0,S(0))=\\&\quad\int_0^t e^{-\rho s}[-\rho C(s,S^{\varepsilon}(s))+C_t(s,S^{\varepsilon}(s))+(\rho-\beta^*\lambda^*)S^{\varepsilon}(s)C_x(s,S^{\varepsilon}(s))+\\&\quad\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(s))^2C_{xx}(s,S^{\varepsilon}(s))]du+\sigma\varepsilon^{\alpha}\int_0^t e^{-\rho t}C_x(s,S^{\varepsilon}(s))dW^*+\\&\quad\sum_{0<s\leqslant t}e^{-\rho s}[C(s,S^{\varepsilon}(s))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]\end{aligned} \tag{5}$$

设 $s$ 是第 $m$ 个泊松过程 $N_m$ 的跳时刻，则 $S^{\varepsilon}(u)=(y_m+1)S^{\varepsilon}(u-)$，所以：

$$\begin{aligned}&\sum_{0<s\leqslant t}e^{-\rho s}[C(s,S^{\varepsilon}(s))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]=\\&\quad\sum_{m=1}^{M}\sum_{0<s\leqslant t}e^{-\rho s}[C(s,(y_m+1)S^{\varepsilon}(s-))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]\Delta N_m(s)=\\&\quad\sum_{m=1}^{M}\int_0^t e^{-\rho s}[C(s,(y_m+1)S^{\varepsilon}(s-))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]d(N_m(s)-\lambda_m^*s)+\\&\quad\int_0^t e^{-\rho s}\lambda^*\sum_{m=1}^{M}\frac{\lambda_m^*}{\lambda^*}[C(s,(y_m+1)S^{\varepsilon}(s-))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]ds=\\&\quad\sum_{m=1}^{M}\int_0^t e^{-\rho s}[C(s,(y_m+1)S^{\varepsilon}(s-))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]d(N_m(s)-\lambda_m^*s)+\\&\quad\int_0^t e^{-\rho s}\lambda^*\sum_{m=1}^{M}p^*(y_m)[C(s,(y_m+1)S^{\varepsilon}(s-))-C(s,S^{\varepsilon}(s-))]ds\end{aligned}$$

代入式(5)，取微分，可得：

$$\begin{aligned}&d(e^{-\rho t}C(t,S^{\varepsilon}(t)))=e^{-\rho t}\{-\rho C(t,S^{\varepsilon}(t))+C_t(t,S^{\varepsilon}(t))+(\rho-\beta^*\lambda^*)S^{\varepsilon}(t)C_x(t,S^{\varepsilon}(t))+\\&\quad\frac{1}{2}(\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t))^2C_{xx}(t,S^{\varepsilon}(t))+\lambda^*\sum_{m=1}^{M}[p^*(y_m)C(t,(y_m+1)S^{\varepsilon}(t))-C(t,S^{\varepsilon}(t))]\}\,dt+\\&\quad\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)C_x(t,S^{\varepsilon}(t))dW^*(t)+\\&\quad\sum_{m=1}^{M}e^{-\rho t}[C(t,(y_m+1)S^{\varepsilon}(t-))-C(t,S^{\varepsilon}(t-))]d(N_m(t)-\lambda_m^*t)\end{aligned}$$

由于 $N_m-\lambda^*t$ 在 $\overset{\approx}{P}$ 下是鞅，且 $e^{-\rho t}[C(t,(y_m+1)S^{\varepsilon}(t-))-C(t,S^{\varepsilon}(t-))]$ 左连续，所以该项的积分是鞅。而且，$\sigma\varepsilon^{\alpha}S^{\varepsilon}(t)C_x(t,S^{\varepsilon}(t))dW^*(t)$ 同样是鞅。由于期权的贴现价格也是鞅，因此漂移项为 0。

从上面的证明过程可以得到如下推论：

**推论 1**　期权价格 $C(t,S^{\varepsilon}(t))$ 满足

$$d(e^{-\rho t}C(t,S^{\varepsilon}(t)))=\sum_{m=1}^{M}e^{-\rho t}[C(t,(y_m+1)S^{\varepsilon}(t-))-C(t,S^{\varepsilon}(t-))]d(N_m(t)-\lambda_m^*t)$$

无跳时，即为文献[6]的结果。

（下转第 472 页）