浙江科技学院学报，第 24 卷第 6 期，2012 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 6, Dec. 2012

**DOI**：10.3969/j.issn.1671-8798.2012.06.007

# Heaviside 函数的 Laplace 变换建立超静定梁挠曲线方程

王海林，王吉民
（浙江科技学院 建筑工程学院，杭州 310023）

**摘　要**：针对不同性质荷载作用下的悬臂梁受力情况，将 Heaviside 函数直接引入 3 种悬臂梁的弯矩方程，从而建立了悬臂梁弯矩方程的通用表达式，并对该方程进行 Laplace 变换，得到了不同荷载作用下的超静定梁挠曲线方程。该方法简化了计算过程，减少了计算量，其结果与结构力学中的已知结论一致。最后列举了一个实例进行分析，证明其是超静定梁挠曲线计算的一种较为快捷的计算方法。

**关键词**：Heaviside 函数；Laplace 变换；超静定梁；挠曲线方程

**中图分类号**：TU311.4　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2012)06-0466-04

# Method of establishing deflection curve of statically indeterminate beam by Laplace transformation of Heaviside function

WANG Hai-lin, WANG Ji-min
(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract**: Heaviside function is introduced to a moment equation of three cantilever beams based on its situations under different loadings to set up a general moment equation of a cantilever beam. And the Laplace transformation is used in this new equation to get a new deflection curve equation of a statically indeterminate beam under different loadings. This method simplifies the calculation process, decreases the computational complexity, and is proved to be in accordance with some known conclusions of structural mechanics. Furthermore, an application example is analyzed, which provides a convenient and fast calculation method to establish deflection curve equation of a statically indeterminate beam in engineering practice.

**Key words**: Heaviside function; Laplace transformation; statically indeterminate beam; deflection curve equation

---

**收稿日期**：2012-11-05

**作者简介**：王海林(1991—　)，男，浙江省杭州人，2010 级土木工程专业本科生。

**通信作者**：王吉民，副教授，博士，主要从事结构工程研究。

梁作为实际工程中应用广泛的构件，它在外荷载作用下引起的弯曲变化受到高度的重视，而作为与之相紧密联系的挠曲线方程的计算问题，也就成了材料力学中的一个重要内容。关于梁挠曲线的计算方法有很多，如积分法、能量法、图乘法、共轭梁法、变分法等。目前，在大部分的材料力学教材中，梁挠曲线方程的首选计算方法是积分法，但是在实际的工程分析中，由于梁上常常作用有多种荷载，用积分法需要在梁的连续性条件和边界条件的基础上确定各段相应的积分常数，致使过程显得非常繁琐，因此不是很实用。

文献[1]提供了一种在 Laplace 变换的基础上求解梁挠曲线方程的方法。本研究以此方法为基础，将 Heaviside 函数直接引入梁的弯矩方程，从而构造出全梁通用方程，并对该方程进行 Laplace 变换，通过梁的基本方程并结合边界条件，直接计算出超静定梁的挠曲线方程，从而进一步简化了计算过程，减少了计算量，为超静定梁挠曲线方程的求解提供了一种较为快捷的计算模式。

## 1　Heaviside 函数及相关性质

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

上式即为 Heaviside 函数，常记为 $H(x)$，由于其在 $x=0$ 处发生跳跃，故又称为单位阶跃函数（unit step function）。Heaviside 函数具有多种性质，它还是 $\delta(x)$ 函数的原函数[2]。关于 Heaviside 函数，可参考相关文献，这里不赘述。

## 2　梁通用方程的建立

### 2.1　基本公式

材料力学[3] 中，考虑小变形状态，梁的挠曲线近似微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-M(x)}{EI}\tag{1}$$

### 2.2　利用 Heaviside 函数建立通用方程

有一悬臂梁，分别在该梁上作用集中力 $P$（图 1），力偶 $M$（图 2），均布荷载 $q$（图 3）

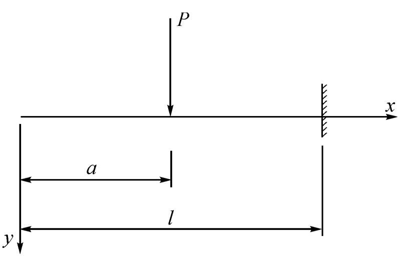


**图 1**　集中力 $P$ 作用下的悬臂梁

**Fig. 1**　Cantilever beam under concentrated force $P$

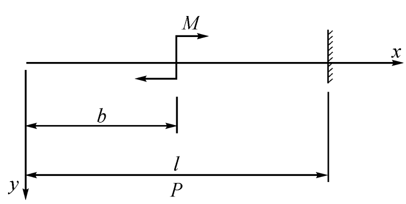


**图 2**　力偶 $M$ 作用下的悬臂梁

**Fig. 2**　Cantilever beam under force couple $M$

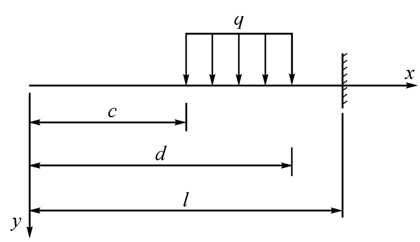


**图 3**　均布荷载 $q$ 作用下的悬臂梁

**Fig. 3**　Cantilever beam under uniform load $q$

#### 2.2.1　集中力 $P$ 作用下悬臂梁弯矩值 $M(x)$ 的表达

$$M(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,a]\\ -P(x-a) & x\in[a,l]\end{cases}$$

引入 Heaviside 函数，所以，有

$$M(x)=-P(x-a)H(x-a)$$

#### 2.2.2　力偶 $M$ 作用下悬臂梁弯矩值 $M(x)$ 的表达

$$M(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,b]\\ M(x-b)^0 & x\in[b,l]\end{cases}$$

所以,有

$$M(x)=M(x-b)^0H(x-b)$$

2.2.3 均布荷载 $q$ 作用下悬臂梁弯矩值 $M(x)$ 的表达

$$M(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,c]\\ -\dfrac{1}{2}q(x-c)^2 & x\in[c,d]\\ -\dfrac{1}{2}q(x-c)^2+\dfrac{1}{2}q(x-d)^2 & x\in[d,l]\end{cases}$$

所以,有

$$M(x)=-\frac{1}{2}q(x-c)^2H(x-c)+\frac{1}{2}q(x-d)^2H(x-d)$$

### 2.3 一般情况

所以,基于小变形和线弹性情况下的叠加原理,对于该悬臂梁,不管梁上作用有上述荷载中的几种,弯矩 $M(x)$ 均可表示为一个如下的通用方程:

$$M(x)=M(x-b)^0H(x-b)-P(x-a)H(x-a)-\frac{1}{2}q(x-c)^2H(x-c)+\frac{1}{2}q(x-d)^2H(x-d) \quad (2)$$

将该通用方程(2)带入挠曲线近似微分方程(1)式,有

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=P(x-a)H(x-a)-M(x-b)^0H(x-b)+\frac{1}{2}q(x-c)^2H(x-c)-\frac{1}{2}q(x-d)^2H(x-d) \quad (3)$$

## 3 挠曲线方程的 Laplace 变换

### 3.1 Laplace 变换具有的主要性质有

频移性质

$$L[f(t)\mathrm{e}^{-at}]=F(s+a)$$

延迟性质

$$L[f(t-t_0)u(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-st_0}F(s)$$

卷积性质

$$L\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]=L[f_1(t)]L[f_2(t)]$$

微分性质

$$L\left[\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$$

### 3.2 对式(3)进行 Laplace 变换

结合上述所列的 Laplace 变换性质,式(3)左右进行变换,有

$$EI[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]=\left[\frac{P\mathrm{e}^{-as}}{s^2}-\frac{M\mathrm{e}^{-bs}}{s}+\frac{q\mathrm{e}^{-cs}}{s^3}-\frac{q\mathrm{e}^{-ds}}{s^3}\right] \quad (4)$$

化简整理,得

$$Y(s)=\frac{1}{EI}\left[\frac{p\mathrm{e}^{-as}s-M\mathrm{e}^{-bs}s^2+q(\mathrm{e}^{-cs}-\mathrm{e}^{-ds})}{s^5}\right]+\frac{y(0)}{s}+\frac{y'(0)}{s^2} \quad (5)$$

对(5)式进行反 Laplace 变换,有

$$y(x)=\frac{1}{EI}\left[\frac{P}{6}(x-a)^3H(x-a)-\frac{M}{2}(x-b)^2H(x-b)+\frac{1}{24}q(x-c)^4H(x-c)-\frac{1}{24}q(x-d)^4H(x-d)\right]+y(0)+y'(0)x \quad (6)$$

故,式(6)即为基于 Heaviside 函数的梁通用挠曲线方程。

## 4　算　　例

### 4.1　方法验证

如图 4 所示，有一受均布荷载作用下的两端固定梁，首先定义：设梁 $A$ 端反力为 $R_A$，$B$ 端反力为 $R_B$，方向均竖直向上；梁 $A$ 端弯矩为 $M_A$，$B$ 端弯矩为 $M_B$，顺时针为正。

于是，根据式(6)，有

$$EIy(x)=EIy'(0)x+EIy(0)-\frac{R_A}{6}x^3-\frac{M_A}{2}x^2+\frac{q}{24}x^4$$

利用边界条件：$y|_{x=0}=0$，得 $y(0)=0$；$y'|_{x=0}=0$，得 $y'(0)=0$

$$y|_{x=l}=0，得\frac{M_Al^2}{2}+\frac{R_Al^3}{6}=\frac{ql^4}{24}；y'|_{x=l}=0，得 M_Al+\frac{R_Al^2}{2}=\frac{ql^3}{6}$$

联立两式，求解得

$$M_A=\frac{-ql^2}{12}，R_A=\frac{ql}{2}$$

因为 $M_A=\frac{-ql^2}{12}$，表示 $M_A$ 方向跟所设的方向相反，即 $M_A$ 实际方向为逆时针方向，即表示梁的上侧受拉，大小为 $\frac{ql^2}{12}$。所以设梁的固端弯矩 $M_{AB}^F$（以顺时针方向为正），有 $M_{AB}^F+\frac{ql^2}{12}=0$，即 $M_{AB}^F=-\frac{ql^2}{12}$。

同理，得出 $A$，$B$ 的固端剪力，综合后即

$$M_{AB}^F=-\frac{ql^2}{12}，M_{BA}^F=\frac{ql^2}{12}，F_{QAB}^F=\frac{ql}{2}，F_{QBA}^F=-\frac{ql}{2}$$

这个结果与结构力学[4] 等截面杆件的载常数表中所列的情况完全一致，故该方法正确。所以，化简后，均布荷载作用下的两端固定梁挠曲线方程为

$$y(x)=\frac{qx^2}{24EI}(-2lx+l^2+x^2)$$

这个方程与结构静力计算手册[5] 给出的方程相同。

### 4.2　实　　例

如图 5，有一超静定梁，各荷载均标于梁上，根据(6) 式，有

$$EIy(x)=EIy'(0)+EIy(0)-\frac{M_A}{2}x^2-\frac{R_A}{6}x^3-\frac{M}{2}\left(x-\frac{l}{3}\right)^2H\left(x-\frac{l}{3}\right)+\frac{P}{6}\left(x-\frac{l}{2}\right)^3H\left(x-\frac{l}{2}\right)+\frac{q}{24}\left(x-\frac{2l}{3}\right)^4H\left(x-\frac{2l}{3}\right)-\frac{q}{24}\left(x-\frac{5l}{6}\right)^4H\left(x-\frac{5l}{6}\right)\tag{7}$$

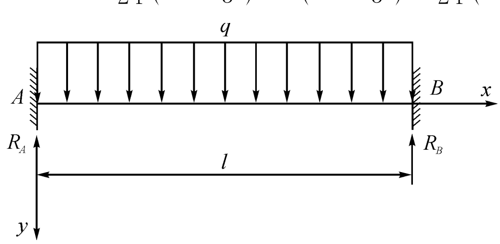


**图 4**　均布荷载作用下的两端固定梁

**Fig. 4**　Both ends clamped beams under uniform load

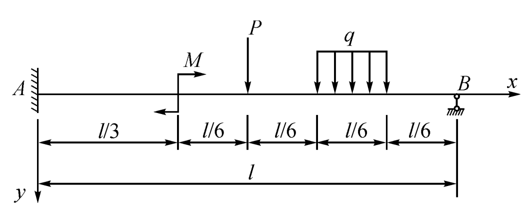


**图 5**　超静定梁简图

**Fig. 5**　Diagram of statically indeterminate beam

利用边界条件：$y|_{x=0}=0$，得 $y(0)=0$；$y'|_{x=0}=0$，得 $y'(0)=0$

$$y|_{x=l}=0，得 0=\frac{M_A}{2}l^2+\frac{R_Al^3}{6}+\frac{2}{9}Ml^2-\frac{Pl^3}{48}-\frac{ql^4}{1\,944}+\frac{ql^4}{31\,104}$$

补充静力方程，对 $B$ 取矩

$$\sum M_B=0，R_Al+M_A+M-\frac{Pl}{2}-\frac{ql}{6}\left(\frac{l}{12}+\frac{l}{6}\right)=0$$

（下转第 487 页）