

计算弯曲变形的几何法

陈合龙,姜风华,何春木

(台州学院 建筑工程学院,浙江 台州 318000)

摘要: 弯曲变形问题本质上是几何问题,即杆轴线上任意点的位移都可以视为由起点处横截面的转角和杆的弯曲导致的。基于此来找出位移与微段杆弯曲、起点处横截面的转角的关系式,引入弯曲变形与内力的关系式,从而将杆的位移表示成杆的弯曲和旋转。该方法可以拓展到任意形状杆件的平面弯曲变形的计算,且对比传统方法更具一般性;而且在增加初参数的情况下,该方法可以分析超静定杆件的弯曲变形问题。通过两个求解杆弯曲位移方程的算例,验证了该方法的正确性。

关键词: 弯曲变形;弯曲位移;几何法;曲杆;位移方程

中图分类号: TU501; O33

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2012)06-0470-05

Geometric method of calculating bending deformation

CHEN He-long, JIANG Feng-hua, HE Chun-mu

(School of Civil Engineering and Architecture, Taizhou University, Taizhou 318000, China)

Abstract: Substantially, the bending deformation is a geometric problem, that is, the displacement of a specified point in the bar is produced by the rotation of the cross-section at a starting point and the bending of bar. On this basis, we find out the rotation and bending in relation to displacement. And the relation equation between the moment-curvature and internal force is used. The displacement is expressed by the function of the bending and rotation of the bar. This method of computing the bending displacement can be easily expanded to fix the plane bending of various shapes of bars. Comparing with the conventional method of analyzing bending bars, this method is more general and can be used to analyze the statically indeterminate bars by introduction of initial parameters. Moreover, two examples are given to demonstrate the method.

Key words: bending deformation; bending displacement; geometric method; curved bar; displacement equation

计算弯曲变形的比较多,常用的方法有积分法^[1-7]、初参数法^[8-10]、能量法^[9-12]和虚功法^[13]。积分法和初参数法适合计算直杆或折杆弯曲的位移,但无法计算曲杆弯曲的位移;拓展后的积分法可分析超静定结构的弯曲变形问题^[6-7]。虚功法基于虚功原理来计算弯曲位移,但是它的计算过程涉及多次弯矩计算,而且每次只能计算一个点在一个方向的位移^[13]。实际上,常用方法都回避了弯曲变形问题是几何问题这一本质,因而它们都有缺陷。基于这个思路,本研究从弯曲变形的几何性出发,利用基本的变形-内力关系,笔者找到了计算弯曲变形的新的积分法。该方法适用于计算各种形状的杆件的平面弯曲小变形问题,对静定结构和超静定结构弯曲问题的分析步骤也是一致的。因此,该方法不仅是常规方法的重要补充,而且不失为一个计算平面弯曲问题的新选择。

1 公式推导

为了简便起见,以悬臂杆为例。如图 1 所示,悬臂杆长为 l ,杆在平面内的抗弯刚度为 EI ,左端 A 固定,右端 B 受集中力 F 的作用。建立如图所示的坐标系。设杆弯曲的挠曲线方程为 $w = w(s)$,转角方程为 $\theta = \theta(s)$ 。

先计算 B 端的挠度 w_B ,为此取长度很小的一段杆 Δs ,查看由于这一小段杆的弯曲造成的 B 的挠度,如图 2 所示。

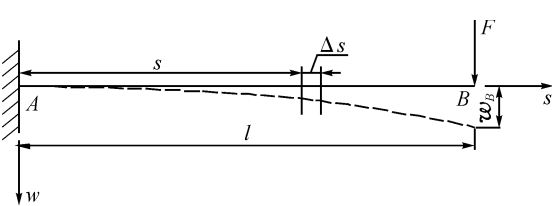


图 1 悬臂杆
Fig. 1 Cantilever bar

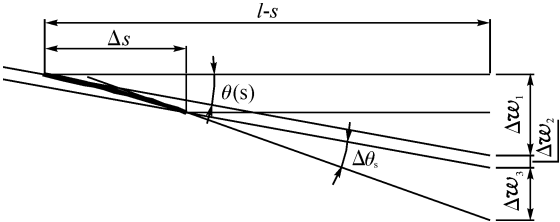


图 2 微段弯曲
Fig. 2 Segmented bar under bending

图中, $\theta(s)$ 为 s 处的转角, $\Delta\theta_s$ 为微段 Δs 的转角的改变量。假定杆的变形很小,则:

$$\Delta w_1 \approx (l - s) \cdot \theta(s) \tag{1}$$

$$\Delta w_3 \approx (l - s - \Delta s) \cdot \Delta\theta(s) \tag{2}$$

$$\Delta w_2 \approx w(s + \Delta s) - w(s) - \Delta s \cdot \theta(s) \tag{3}$$

容易看出, Δw_1 为 s 处的转角引起的 B 端的位移, $\Delta w_2 + \Delta w_3$ 为微段 Δs 的弯曲引起的 B 端的位移。

在变形很小的情况下,有

$$w^{(1)}(s) = \tan\theta(s) \approx \theta(s) \tag{4}$$

将式(5)代入式(3),并利用式(4):

$$w(s + \Delta s) \approx w(s) + w^{(1)}(s) \cdot \Delta s + \frac{w^{(2)}(s)}{2} \cdot (\Delta s)^2 \tag{5}$$

得:

$$\Delta w_2 \approx \frac{w^{(2)}(s)}{2} \cdot (\Delta s)^2 \tag{6}$$

假设 s 处的曲率半径为 ρ ,则有

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \tag{7}$$

联系式(7),比较式(2)和式(6),可知 Δw_2 相对于 Δw_3 为高阶微量。即:

$$\Delta w_2 + \Delta w_3 \approx \Delta w_3 \approx (l - s) \frac{\Delta s}{\rho} \tag{8}$$

B 的挠度 w_B 等于 $s = 0$ 处的转角引起的 B 的挠度, 对应式(9) 等式右边的第一项, 加上杆弯曲引起的 B 的挠度, 因此可以这样计算:

$$w_B = \theta(0)l + \int_l \frac{l-s}{\rho} ds \quad (9)$$

记杆的弯矩方程为 $M = M(s)$, 杆的变形与弯矩之间的关系:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M(s)}{EI} \quad (10)$$

将式(10) 代入式(9) 得,

$$w_B = \theta(0)l + \int_l \frac{s-l}{EI} M(s) ds \quad (11)$$

将式(11) 中的 s 换成 t , l 换成 s , 积分限从 0 到 s , 即得到杆的挠曲线方程:

$$w(s) = \theta(0)s + \int_0^s \frac{t-s}{EI} M(t) dt \quad (12)$$

将式(12) 对 s 求导一次即得转角方程:

$$\theta(s) = \theta(0) - \int_0^s \frac{M(t)}{EI} dt \quad (13)$$

2 推广到曲杆

为方便起见, 以半径为 R 的 $1/4$ 圆弧曲杆为例, 如图 3 所示。杆在平面内的抗弯刚度为 EI , A 端固定, B 端受集中力 F 作用。建立如图局部坐标系, 坐标轴 s 沿杆的轴向从 A 到 B , τ 为在任意 s 处的切向, 并与坐标轴 s 正向一致。 w 与坐标轴 s 处处正交, 且从 τ 绕其起点顺时针旋转 90° 到达 w 正向。整体坐标系 xoy , 原点为 A 。现在要研究的是在荷载作用下杆的任意位置的位移。设弯曲的挠曲线方程为 $w = w(s)$, 转角方程为 $\theta = \theta(s)$ 。

图中 τ 、 w 、 $\phi(s)$ 、 $l(s)$ 都是与 s 相关的量。其中, $l(s)$ 是坐标为 s 的 C 点与 B 的距离, $\phi(s)$ 为 CB 在 xoy 坐标系下的角度。

不难看出, 直杆下的计算式(从式(1) 到式(13)) 均可顺利地推广到局部坐标系(w_s) 下。

同样地, B 点的位移可以这样计算: $s = 0$ 处的转角引起的 B 的位移, 加上曲杆弯曲引起的 B 的位移。那么, 第一部分由 $s = 0$ 处的转角引起的 B 的位移可以表示为:

$$\Delta'_{Bx} = \theta(0) \cdot l(0) \cdot \sin\phi(0) \quad (14)$$

$$\Delta'_{By} = -\theta(0) \cdot l(0) \cdot \cos\phi(0) \quad (15)$$

式(14) 和式(15) 中, 下角标 x 、 y 分别表示沿 x 、 y 方向的位移, $\theta(0)$ 为 A 处的转角, $l(0)$ 为 AB 的长度, $\phi(0)$ 为 AB 与 x 正向的夹角。

第二部分由曲杆的弯曲引起的 B 的位移为:

$$\Delta''_{Bx} = \int_s \frac{ds}{\rho} l(s) \sin\phi(s) \quad (16)$$

$$\Delta''_{By} = -\int_s \frac{ds}{\rho} l(s) \cos\phi(s) \quad (17)$$

式(16) 和式(17) 中的下角标 s 表示对整个曲杆积分的意思。

因此, 将式(14)、式(15)、式(16) 和式(17) 对应相加, 即得端点 B 的位移为:

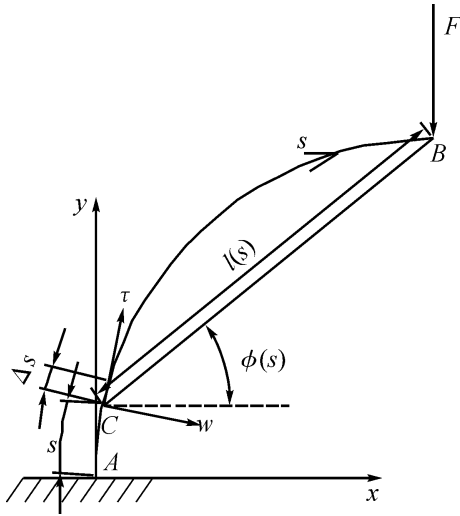


图 3 $1/4$ 曲杆
Fig. 3 $1/4$ curved bar

$$\Delta_{Bx} = \theta(0) \cdot l(0) \cdot \sin\phi(0) + \int_s \frac{ds}{\rho} l(s) \sin\phi(s) \tag{18}$$

$$\Delta_{By} = -\theta(0) \cdot l(0) \cdot \cos\phi(0) - \int_s \frac{ds}{\rho} l(s) \cos\phi(s) \tag{19}$$

将式(10) 代入式(18)、式(19) 得,

$$\Delta_{Bx} = \theta(0) \cdot l(0) \cdot \sin\phi(0) - \int_s \frac{M(s)}{EI} l(s) \sin\phi(s) ds \tag{20}$$

$$\Delta_{By} = -\theta(0) \cdot l(0) \cdot \cos\phi(0) + \int_s \frac{M(s)}{EI} l(s) \cos\phi(s) ds \tag{21}$$

对于任意坐标为 s 的点的位移的计算式可以表示为:

$$\Delta_x(s) = \theta(0) \cdot l(0,s) \cdot \sin\phi(0,s) - \int_0^s \frac{M(t)}{EI} l(t,s) \sin\phi(t,s) dt \tag{22}$$

$$\Delta_y(s) = -\theta(0) \cdot l(0,s) \cdot \cos\phi(0,s) + \int_0^s \frac{M(t)}{EI} l(t,s) \cos\phi(t,s) dt \tag{23}$$

需要说明的是,与式(18)、式(19) 中不同,式(22)、式(23) 中, l 、 ϕ 有两个参数,它们是两个点的弧坐标,第一个参数表示第一个点的弧坐标,第二个参数表示第二个点的弧坐标, l 表示这两点的距离, ϕ 表示由第一点连向第二点的线段与 x 轴正向的夹角。

曲杆的转角计算式与直杆的转角计算公式(13) 相同。

需要指出的是,对于静定问题,式(12)、式(13)、式(22) 和式(23) 中只涉及一个初参数(如起点的转角),这个初参数可以是已知的,也可以是待定的;而对于超静定问题,需要增加初参数(起点的转角、弯矩、剪力),以表示出方程中的各项,待定的初参数都可以通过约束条件来确定。

必须说明,弯曲构件的位移主要由弯矩引起,通常不计入轴力和剪力对弯曲位移的影响,以上推导也以此为前提。

3 应用举例

本节将计算图 1 所示的悬臂杆的挠曲线方程和转角方程,以及图 3 所示的 1/4 圆弧杆的位移方程和转角方程。

对于悬臂杆,将弯矩方程 $M(t) = -Fl + Ft$ 及 $\theta(0) = 0$ 代入式(12) 中,积分得到悬臂杆的挠曲线方程:

$$w(s) = \frac{Fls^2}{2EI} - \frac{Fs^3}{6EI} \tag{24}$$

对 s 求导的转角方程,

$$\theta(s) = \frac{Fls}{EI} - \frac{Fs^2}{2EI} \tag{25}$$

式(24)、式(25) 的结果与文献[1] 一致。

对于 1/4 圆弧杆,为计算方便,不妨采用极坐标进行计算。如图 4 所示,对照式(13)、式(22) 和式(23),有如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} l(0,s) &= 2R\sin\frac{\alpha_s}{2}, \phi(0,s) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_s}{2} \\ l(t,s) &= 2R\sin\frac{\alpha_s - \alpha}{2}, \phi(t,s) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_s}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ \alpha_s &= s/R, \alpha = t/R \end{aligned} \right\}$$

(26)

将式(26) 和弯矩方程 $M = -FR\cos\alpha$ 代入式(13)、式(22) 和式(23),得

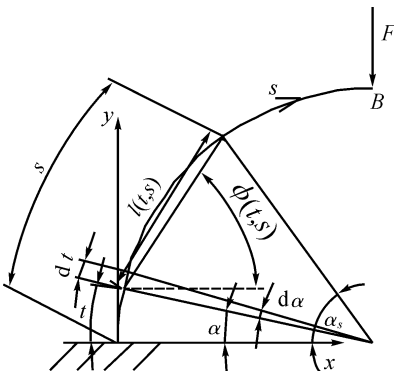


图 4 坐标转换

Fig. 4 Coordinate transformation

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha_s) &= - \int_0^{\alpha_s} \frac{FR \cos \alpha}{EI} R d\alpha \\ \Delta_x(\alpha_s) &= - \int_0^{\alpha_s} \frac{FR \cos \alpha}{EI} 2R \sin\left(\frac{\alpha_s}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_s}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) R d\alpha \\ \Delta_y(\alpha_s) &= \int_0^{\alpha_s} \frac{FR \cos \alpha}{EI} 2R \sin\left(\frac{\alpha_s}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_s}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) R d\alpha \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

积分得，

$$\left. \begin{aligned} \theta(\alpha_s) &= \frac{FR^2}{EI} \sin \alpha_s \\ \Delta_x(\alpha_s) &= \frac{FR^3}{4EI} (1 - \cos 2\alpha_s) \\ \Delta_y(\alpha_s) &= \frac{-FR^3}{4EI} (2\alpha_s - \sin 2\alpha_s) \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

式(28) 的第三方程与文献[13] 的结果一致。

对于其他的静定或超静定结构平面弯曲问题的求解, 计算步骤是一样的。所不同的是, 可能需要利用约束条件来确定起点的待定参数。

4 结 语

本研究从弯曲变形的几何属性出发, 推导了计算弯曲变形的公式, 其思路更具一般性, 计算也更简便。该方法可以计算曲杆的平面弯曲的变形问题, 并且公式中的各项及积分转化成电算也很方便, 进一步拓展了它的适用范围。相比于虚功法, 其思路更直接, 同时避免了虚功法每次计算只能得到一个位移的缺陷。

参考文献:

[1] 王吉民. 材料力学[M]. 北京: 中国电力出版社, 2010.

[2] 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 I[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[3] 刘鸿文. 材料力学 I [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[4] 单辉祖. 材料力学 I [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[5] 范钦珊, 蔡新. 材料力学: 土木、水利类[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.

[6] 王秀华, 张春秋, 门玉涛, 等. 超静定梁变形计算的积分法[J]. 力学与实践, 2009, 31(4): 79-81.

[7] 马希龄, 张广泰, 肖正华. 等截面圆弧杆件的转角位移方程[J]. 新疆工学院学报, 1999, 30(2): 79-83.

[8] 刘庆潭. 材料力学教程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.

[9] 希伯勒. 材料力学[M]. 汪越胜, 译. 北京: 电子工业出版社, 2006.

[10] 孙国钧. 材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2006.

[11] Beer F P, Johnston E R, Sun G J. Mechanics of materials[M]. 2 ed. New York: McGraw-Hill, 1992.

[12] Gere J M, Timoshenko S P. Mechanics of materials[M]. New York: Von Nostrand Reinhold, 1984.

[13] 朱伯钦, 周竞欧, 许哲明. 结构力学: 上册[M]. 上海: 同济大学出版社, 2004: 215-216.