浙江科技学院学报,第 26 卷第 3 期,2014 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 26 No. 3, Jun. 2014

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2014.03.001

$\widetilde{\rho}$混合序列部分和的强大数定律

沈建伟
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要: 利用随机变量的截尾方法和$\widetilde{\rho}$混合序列的矩不等式,得到了矩条件下$\widetilde{\rho}$混合序列的一类强大数定律,丰富了若干已有的强大数律。

关键词: $\widetilde{\rho}$混合序列;强大数律;部分和;截尾

中图分类号: O211.4　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2014)03-0161-04

A strong law of large numbers for partial sums of $\widetilde{\rho}$-mixing sequence

SHEN Jianwei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: A strong law of large numbers for partial sums of $\widetilde{\rho}$-mixing sequence was obtained under the moment conditions by the truncation methods of random variables and moment inequalities of $\widetilde{\rho}$-mixing sequence. The results available richen some known theorems.

Key words: $\widetilde{\rho}$-mixing sequence; strong law of large numbers; partial sums; truncation

1　预备知识

$\widetilde{\rho}$混合序列是一类极为广泛的相依混合序列。对于$\widetilde{\rho}$混合序列的研究已取得了不少成果。Bradley[1]研究了其极限定理;Peligrad 等[2]讨论了$\widetilde{\rho}$混合序列的几乎处处收敛性;吴群英[3-5]得到了$\widetilde{\rho}$混合序列的若干收敛性质及其加权和的完全收敛性和强收敛性,并研究了$\widetilde{\rho}$混合序列的线性模型 M 估计的强相合性;韦静等[6]得到了$\widetilde{\rho}$混合序列加权和最大值的几乎处处收敛性;胡学平等[7]得到了$\widetilde{\rho}$混合序列部分和的若干收敛性质,推广了文献[3]中的结论;Guo 等[8]研究了行$\widetilde{\rho}$混合阵列加权和的矩完全收敛性;沈建伟[9]给出了$\widetilde{\rho}$混合序列部分和的一个强大数律。

下面给出$\widetilde{\rho}$混合序列的定义及与本研究相关的一些引理。为行文方便,总是假设 c 代表正常数,在不

收稿日期: 2014-03-11
作者简介: 沈建伟(1972—　),男,浙江省萧山人,讲师,硕士,主要从事概率极限理论研究。

同的地方可以代表不同的值；用“≪”代表通常意义下的“O”。记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,n\geqslant 1$，$I(A)$ 代表集 A 的示性函数。

设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是定义在概率空间 (Ω,A,P) 上的随机变量序列，$F_S=\sigma(X_i,i\in S\subset\mathbb{N})$；$F_1^n=\sigma(X_i,i\leqslant n)$，$F_{n+k}^{\infty}=\sigma(X_i,i\geqslant n+k)$ 为 σ-域。在 A 中给定 σ-域 F 和 R。令

$$\rho(F,R)=\sup_{X\in L_2(F),Y\in L_2(R)}\frac{|EXY-EXEY|}{(\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y)^{1/2}}$$

对 $k\geqslant 0$，令

$$\rho(k)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho(F_1^n,F_{n+k}^{\infty})$$

$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(F_S,F_T)$：有限子集 $S,T\subset\mathbb{N}$，且 $\mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}$。

显然，$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，且 $\tilde{\rho}(0)=1$。

定义 1 对随机序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$，若存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\tilde{\rho}(k)<1$，则称 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列。

引理 1[10] 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_n=0$，$E|X_n|^p<\infty$，对某些 $p\geqslant 2$ 和任意 $n\geqslant 1$，则存在与 n 无关的正常数 D 使得

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k}X_i\right|^p\right)\leqslant D\left\{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\right)^{p/2}\right\}$$

引理 2[11] 设 $\{a_n,n\geqslant 1\}$ 是非降的正常数列，且对某个常数 c 有 $1\leqslant\frac{a_{2n}}{a_n}\leqslant c<\infty$。若对 $\forall\varepsilon>0$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant a_n\varepsilon)<\infty$，则

$$\frac{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|}{a_n}\to 0,\text{a. s. 。}$$

2 主要结果

定理 1 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$\{a_n,n\geqslant 1\}$ 是常数列且满足 $0<a_n\uparrow\infty$，且对某个常数 c 有 $1\leqslant\frac{a_{2n}}{a_n}\leqslant c<\infty$。$g(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且在区间 $x>0$ 中取正值、不减；函数 $g(x)$ 满足下列条件之一：

1）在区间 $x>0$ 中，$\frac{x}{g(x)}$ 单调不减；

2）在区间 $x>0$ 中，$\frac{x}{g(x)}$ 和 $\frac{g(x)}{x^2}$ 单调不增，且 $EX_n=0,n\geqslant 1$。

假定

$$\sup_{n\geqslant 1}Eg(|X_n|)<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(a_n)}<\infty,\tag{1}$$

则

$$\frac{S_n}{a_n}\to 0,\text{a. s. 。}$$

在**定理 1** 中，令 $g(x)=|x|^p$，$p>0$，可得

推论 1 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$\{a_n,n\geqslant 1\}$ 是常数列，满足 $0<a_n\uparrow\infty$，且对某个常数 c 有 $1\leqslant\frac{a_{2n}}{a_n}\leqslant c<\infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}<\infty$，$0<p\leqslant 2$，且 $1<p\leqslant 2$ 时 $EX_n=0$。假定 $\sup_{n\geqslant 1}E|X_n|^p<\infty$，则 $\frac{S_n}{a_n}\to 0$，a. s. 。

在**推论 1** 中，取 $a_n=[n(\log n)^{1+\delta}]^{1/p}$，$\delta>0$，有

推论 2　设$\{X_n,n\geqslant1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列,$0<p\leqslant2$,且$1<p\leqslant2$时$EX_n=0$。假定$\sup\limits_{n\geqslant1}E|X_n|^p<\infty$,则对于$\forall\delta>0$,$\dfrac{S_n}{[n(\log n)^{1+\delta}]^{1/p}}\to0$,a. s. 。

注:此结果直接推广了文献[3]中**推论 3** 的结果。

在**定理 1** 中,令$g(x)=x^2$,取$a_n=n^\alpha(\log n)^\beta$,$\alpha>0$,$\beta\geqslant0$,有

推论 3　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是均值为零的$\tilde{\rho}$混合序列,假定$\sup\limits_{n\geqslant1}EX_n^2<\infty$,

1)当$\alpha=\dfrac{1}{2}$,$\beta>\dfrac{1}{2}$时,有$\dfrac{S_n}{n^\alpha(\log n)^\beta}\to0$,a. s. ;

2)当$\alpha>\dfrac{1}{2}$时,有$\dfrac{S_n}{n^\alpha(\log n)^\beta}\to0$,a. s. ;特别地,当$\beta=0$时,有$\dfrac{S_n}{n^\alpha}\to0$,a. s. 。

定理 1 的证明　记$X_n^{a_n}=X_nI(|X_n|\leqslant a_n)$

假设$g(x)$满足条件 1),可得

$$|EX_n^{a_n}|\leqslant E|X_n|I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\frac{a_nEg(|X_n|)}{g(a_n)}。$$

假设$g(x)$满足条件 2),注意到$EX_n=0$可得

$$|EX_n^{a_n}|=|EX_nI(|X_n|\leqslant a_n)|=|EX_nI(|X_n|>a_n)|\leqslant$$
$$E|X_n|I(|X_n|>a_n)\leqslant\frac{a_nEg(|X_n|)}{g(a_n)}。$$

故无论$g(x)$满足条件 1)或 2),都有

$$\frac{|EX_n^{a_n}|}{a_n}\leqslant\frac{Eg(|X_n|)}{g(a_n)}。\tag{2}$$

从而由式(1)、式(2)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|EX_n^{a_n}|}{a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg(|X_n|)}{g(a_n)}\leqslant\sup_{n\geqslant1}Eg(|X_n|)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(a_n)}<\infty。$$

由 Kronecker 引理得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}|E\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^{a_k}|=0$。　(3)

由 Chebyshev 不等式及式(1)可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n\neq X_n^{a_n})=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg(|X_n|)}{g(a_n)}\leqslant$$
$$\sup_{n\geqslant1}Eg(|X_n|)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(a_n)}<\infty。\tag{4}$$

由式(3)、式(4)及 Borel-Cantelli 引理可知,要证明定理成立,只需证明

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k^{a_k}-EX_k^{a_k})\to0,\text{a. s. 。}\tag{5}$$

假设$g(x)$满足条件 1),则在区间$|x|\leqslant a_n$中,可得

$$\frac{x^2}{(a_n)^2}\leqslant\frac{|x|}{a_n}\leqslant\frac{g(|x|)}{g(a_n)}。$$

假设$g(x)$满足条件 2),则在区间$|x|\leqslant a_n$中,可得

$$\frac{g(|x|)}{x^2}\geqslant\frac{g(a_n)}{(a_n)^2}。$$

因此,无论$g(x)$满足条件 1)或条件 2),在区间$|x|\leqslant a_n$中,都有

$$\frac{x^2}{g(|x|)}\leqslant\frac{(a_n)^2}{g(a_n)},对\forall n\geqslant1。\tag{6}$$

结合式(6),$\{a_n,n\geqslant1\}$为一非降、趋于无穷的正常数列可知

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(a_k)^2}{g(a_k)}\leqslant\frac{(a_n)^2}{g(a_n)}。\tag{7}$$

由 Markov 不等式、**引理 1**、式(6)、式(7)和式(1)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{j} (X_k^{a_k} - EX_k^{a_k}) \right| \geqslant a_n \varepsilon\right) \ll$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n^{-2} E \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left| \sum_{k=1}^{j} (X_k^{a_k} - EX_k^{a_k}) \right|^2 \ll$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \max_{1\leqslant k\leqslant n} E(X_k^{a_k})^2 \leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k^2 \frac{Eg(|X_k|)}{g(a_k)} \leqslant$$

$$\sup_{k\geqslant 1} Eg(|X_k|) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(a_n)} < \infty。$$

由**引理 2** 可得**定理 1** 结论成立。

从定理的证明过程可知,该结果主要是利用了文献[11]中关于证明强大数律的一般方法并结合$\tilde{\rho}$混合序列的矩不等式得到的。利用该方法,也可得到其他一些相依序列关于强大数律的结论。

参考文献:

[1] Bradley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields[J]. Journal of Theoretical Probability,1992,5(2):355-373.

[2] Peligrad M, Gut A. Almost-sure results for a class of dependent random variables[J]. Journal of Theoretical Probability,1999,12(1):87-104.

[3] 吴群英. ρ 混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报,2001,18(3):58-64,50.

[4] 吴群英. ρ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 应用数学,2002,15(1):1-4.

[5] 吴群英. $\tilde{\rho}$混合线性模型 M 估计的强相合性[J]. 数学物理学报,2005,25(1):41-46.

[6] 韦静,唐国强. $\tilde{\rho}$混合随机变量序列加权和最大值的几乎处处收敛性[J]. 桂林理工大学学报,2011,31(4):633-636.

[7] 胡学平,桂春燕. $\tilde{\rho}$混合序列部分和的若干收敛性质[J]. 数学杂志,2012,32(3):521-528.

[8] Guo M L, Dong J, Ren Y. Complete moment convergence of weighted sums for arrays of rowwise ρ^*-mixing random variables [J]. 应用数学,2013,26(1):18-27.

[9] 沈建伟. $\tilde{\rho}$混合序列的一个强大数律[J]. 浙江科技学院学报,2013,25(5):325-328.

[10] Utev S, Peligrad M. Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables[J]. Journal of Theoretical Probability,2003,16(1):101-115.

[11] Yang S C, Su C, Yu K M. A general method to the strong law of large numbers and its applications[J]. Statistics & Probability Letters,2008,78(6):794-803.