

基于构造作图与基于约束求解作图方法的比较 ——基于几何画板、超级画板及 Geometry Expression 的对比

陈晓霞^{1,2}

(1. 浙江科技学院 理学院, 杭州 310023; 2. 华中师范大学 国家数字化学习工程技术研究中心, 武汉 430079)

摘 要: 基于构造的作图方式是被广泛应用的动态几何软件所使用的作图方式,其优点是作图功能丰富,但限于基于构造的这种作图方式使其作图方式不够自然,智能性不够;而基于约束求解的作图方式可以克服这些问题,但限于约束求解算法的复杂性,对于某些作图功能如迭代等还有待完善。因此,开发将基于构造作图和基于约束求解作图相结合的动态几何软件将大大提高作图软件的智能性,提高其应用的广泛性。

关键词: 基于构造作图;基于约束求解作图;动态几何

中图分类号: TP391.41;O18

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2014)03-0199-07

Comparative research on construction-based drawing and constraint-based drawing —Based on comparison among GSP, SSP and geometry expression

CHEN Xiaoxia^{1,2}

(1. School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

2. National Engineering Research Center For E-Learning, Central China Normal University, Wuhan 430079, China)

Abstract: The dynamic geometry software, such as GSP and SSP are based on construction drawing with rich and powerful drawing functions. But the construction-based drawing has some defects and is not natural. Although the constraint-based drawing can solve these problems, it can not solve some drawing problems such as iteration problems limited on the complexity of the algorithm. So the dynamic geometry software with construction-based drawing and constraint-based drawing can greatly improve the intelligence and applicability.

Key words: construction-based drawing; constraint-based drawing; dynamic geometry

收稿日期: 2014-04-28

作者简介: 陈晓霞(1978—),女,山西省潞城人,讲师,博士研究生,主要从事机器证明、几何约束求解理论等研究。

随着信息技术的不断发展,各种动态几何软件的功能变得越来越强大,利用动态几何软件作图进行课堂教学、科学研究等已经变得越来越普遍。由于数学学科在基础教育知识体系中的重要性,国内外针对数学学科的教学需求开发的动态几何软件有 40 多种,其中比较著名的有:几何画板(The Geometry's SketchPad)^[1]、超级画板(Super Smart Platform)^[2]、GeoGebra^[3]、Carbri Geometry^[4]、Geometry Expression^[5]等。这些动态几何软件提供给用户丰富多彩的作图功能,用户利用系统所提供的几何变换、迭代、几何量的测量、几何图元的跟踪(包括轨迹生成)、动画等功能,可完成许多复杂且优美的几何图形,在几何图元的动态变化过程,用户通过观察可进行几何命题的探讨、学习。

1 基于构造作图与基于约束求解作图方法比较

1.1 基于构造作图

基于构造的作图方式是指用户需根据已经存在的几何对象来创建新的几何对象,在创建新的几何对象之初,用户必须清楚该几何对象与已经存在的几何对象是否存在约束关系,并就此准确地逐步地完成几何对象的构造。当几何对象的构造完成后,几何对象之间的约束关系随之建立,用户无法再重新修改几何对象间的约束关系,也无法对互相独立的几何图元之间增加约束关系。

基于构造的作图方式的主要优点是作图功能丰富、动画功能强大等;主要缺点是用户需要具备一定的几何背景知识和一定的作图技巧才能完成一些基本的几何图形的构造,并且对已经存在的几何对象之间无法添加、无法修改约束关系。

几何画板和超级画板等基于构造作图的动态几何软件都提供包含迭代在内的多种几何变换功能,利用这样的作图功能,可以构造蕴含着丰富的数学思想又非常优美的几何图形,如图 1 所示的几个著名的迭代图。

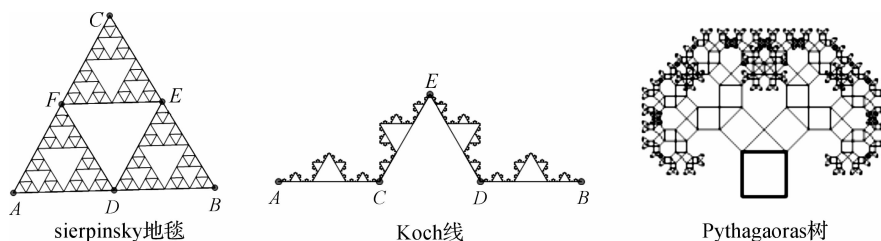


图 1 迭代图

Fig. 1 Iterative graph

几何画板和超级画板还提供丰富的点的跟踪、动画、轨迹等功能,可跟踪绘制点的轨迹、直线的轨迹、圆锥曲线的轨迹等;提供包括单点驱动、多点驱动、参数驱动等在内的多种驱动方式的轨迹。

如利用超级画板可制作如图 2 所示的点的轨迹,其中点 G 是线段 EF 的中点,当点 E 、 F 分别在其父圆上同时运动,在相同的时间内完成一周运动,点 G 的轨迹为图 2 左图所示;如果点 F 在圆 A 上运动 10 周,同时点 E 在圆 C 上运动 1 周,点 G 的轨迹如图 2 右图所示,当用户选择轨迹曲线的不同填充方式时,可形成漂亮的万花筒;用户可用鼠标右键单击轨迹,得到轨迹的属性对话框,如图 3 所示。在轨迹属性页面,用户可修改主动点的运动范围和周期比,从而得到不同的图形轨迹。

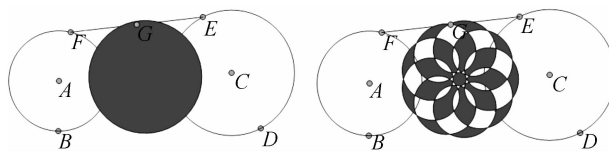




图 2 多点驱动的点的轨迹

Fig. 2 Locus of point driven by multipoints

但是,对于一些基本的几何对象的构造,用户却需要一定的构造技巧和几何知识背景才能完成,如利用几何画板构造一个等边三角形,需按如下步骤完成:

- 1) 选择 , 构造线段 AB ;
- 2) 选择 , 构造以 A 为圆心、 B 为圆上一点的圆;




- 3) 选择  ,构造以 B 为圆心、 A 为圆上一点的圆;
- 4) 选择  ,在圆 A 和圆 B 高亮显示时,按下鼠标构造圆 A 和圆 B 的交点 C ;
- 5) 选择  ,构造三角形 ABC 。



图3 轨迹属性

Fig. 3 Dialog box of locus properties

除了上述作图步骤之外,不同的使用者根据不同的几何性质可以使用不同的作图步骤完成等边三角形的构造,如果用户需要构造其他正多边形,则需要更多的技巧和一定的知识背景才能完成。鉴于此超级画板在几何画板的基础上增加了一些常用图形的一键构造功能,如正方形、等边三角形等一些常见的多边形、线段的比例点、圆锥曲线及其特征点等,用户可选择待构造几何对象的父对象,再选择相应的作图命令一键完成几何对象的构造。如上述等边三角形的构造,利用超级画板仅需下面几步可完成:

- 1) 在智能画笔状态下,画线段 AB ;
- 2) 在选择状态下,选择点 A 、 B ,选择菜单项作图→常见多边形→等边三角形构造三角形 ABC ,如图4所示,系统自动添加点 C 和线段 AC 、 BC 。

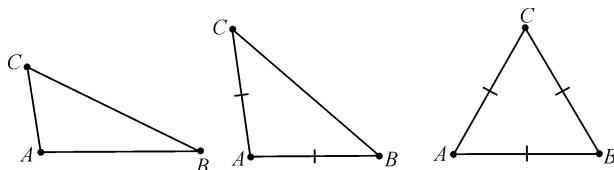


图4 等边三角形的构造过程



Fig. 4 Constructive process of equilateral triangle

利用上述步骤大大地减少了作图步骤,提高了作图的智能性,但缺点是仅能构造系统所提供的有限的几种常用图形,如要求利用椭圆的定义构造椭圆,使用者仍需要相当的作图技巧和知识背景。

1.2 基于约束作图

基于约束求解的作图方式是指在用户构造新的几何对象时,不需要完全准确地建立与已经存在的几何对象之间的约束关系,当新的几何对象构造完成后,再依次选择需要建立约束关系的几何对象,选择所需要的约束关系,系统通过约束求解算法完成几何图元的调整工作,使得几何图元之间满足所要求的约束关系。

利用基于约束求解的作图方式,可使动态几何软件的操作性变得更自然,更符合人的使用习惯。例如上文中所提到的等边三角形的构造,利用 Geometry Expression,用户可按如下步骤来完成:

- 1) 选择构造线段,依次绘制线段 AB 、 BC 、 AC ;
- 2) 依次选择线段 AC 、 AB ,选择“线段长度相等”约束  ,使 $AC=AB$;
- 3) 依次选择线段 BC 、 AB ,选择“线段长度相等”约束  ,使 $BC=AB$;

当前的三角形 ABC 即为等边三角形,利用上述步骤构造等边三角形,用户不需要任何背景知识和作图技巧,正方形等其他正多边形可用类似的步骤完成。

另外,基于约束求解的作图方式可完成某些参数约束求解问题,这类问题是基于构造作图的动态几何软件无法完成或者需要使用者非常复杂的作图技巧才能完成的。例如构造一个边长分别为参数 a, b, c 的三角形,用户可通过观察 a, b, c 值的变化来观察三角形形状的变化,以及三角形的存在条件。

但是,基于约束求解的作图方式鉴于其算法的复杂性,它对于某些构造作图的功能却无法完成,例如迭代,例如多点驱动的点的轨迹等。

1.3 智能画笔作图

超级画板提供了一种结合了基于构造作图和基于约束作图 2 种方式的作图方法:智能画笔作图。智能画笔作图方法是指单击鼠标作点、单击鼠标后拖动至某位置后再松开鼠标作线段、双击鼠标后拖动至某位置后松开鼠标作圆(已知圆心和圆上一点的圆);在鼠标移动过程中,如果当前拟绘制的几何对象(点、线、圆)和已存在的几何对象存在某种约束关系,如是某线段的中点、是某些几何对象之间的交点、与某已知直线平行、与某已知圆相切等,当鼠标移动至相应位置时,则高亮显示这些几何对象,如果在此位置单击鼠标或松开鼠标,则所构造的几何对象与已存在的几何对象间保持该约束关系,如图 5 所示。

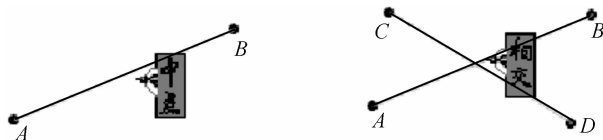


图 5 智能画笔示意图

Fig. 5 Sketch map of intelligent pen

智能画笔作图可以提高动态作图系统的智能性、操作性,用户为构造满足某几何约束关系的几何对象时,不必不断地在菜单项中寻找相应的作图命令,超级画板利用智能画笔可完成 20 多种满足一定几何约束关系的几何对象,大大地提高了作图效率。智能画笔作图将基于约束的作图与基于构造的作图方式作了一定的结合,但与基于构造作图所构造的几何对象一样,一旦完成了几何对象的构造,几何对象之间的约束关系将无法修改。

智能画笔作图可以提高动态作图系统的智能性、操作性,用户为构造满足某几何约束关系的几何对象时,不必不断地在菜单项中寻找相应的作图命令,超级画板利用智能画笔可完成 20 多种满足一定几何约束关系的几何对象,大大地提高了作图效率。智能画笔作图将基于约束的作图与基于构造的作图方式作了一定的结合,但与基于构造作图所构造的几何对象一样,一旦完成了几何对象的构造,几何对象之间的约束关系将无法修改。

2 实例

如何高效地利用不同的动态几何软件完成同一几何问题的作图,使得所作图形不仅美观而且能够更加简洁、更加直观地展现几何图形之间的关系,能够更好地利用动态性来研究几何图形变化过程中几何图形之间所蕴含的几何性质。如何构造这样的几何图形与动态几何软件所提供的功能,以及用户的几何背景知识和软件熟悉程度、作图技巧是息息相关的。使用基于构造的作图方式的动态几何软件来完成某个问题的作图,一直以来都是广大一线中学数学教师和几何爱好者所研究的内容之一。而基于约束求解作图的动态几何软件则对使用者的作图技巧和几何知识背景要求没有这么高。

上文已经讨论了基于构造作图和基于约束作图的不同之处,比较了 2 种作图方式的优缺点,现就“椭圆的构造”的作图、“三角形的内切圆”和“勾股定理的学习”这 3 个实例来作进一步具体的比较。

2.1 “椭圆的构造”的作图对比

使用几何画板或超级画板基于构造的作图方法来完成“椭圆的构造”的作图有很多方法,在文献[6]中分别基于椭圆的 4 种不同定义方法罗列了 4 种作法,文献[7]中基于“到两定点的距离之和(差)为定值的点的轨迹为椭圆(双曲线)”的定义方法给出了一种作法。基于同一个定义不同的使用者可以给出很多不同的作法,例如文献[2]中给出的作法仅需要 4 步,并且很容易推广到双曲线(作法 1);在文献[1]中同样基于“到两定点的距离之和为定值的点的轨迹为椭圆”给出的作图方法需要 8 步完成(作法 2);不同的用户的几何水平不同、软件操作熟悉程度不同导致同一个问题会有复杂程度相差很多的作法,现就作法 1 与基于约束求解作图方法(作法 3)作对比。

“椭圆的构造”作法 1:

- 1) 利用智能画笔, 作以点 A 为圆心过点 B 的圆;
- 2) 连接 AB , 其上作点 C , 圆上作点 D , 连接 CD 、 AD ;
- 3) 作 CD 的中点 E ;
- 4) 过 E 作 CD 的垂线交 AD 于 F 。

由于 $CF=DF$, 而 $AF+CF=AF+DF=AD=R=AB$ 。所以, 当 D 在圆 A 上运动时, 点 F 的运动轨迹为椭圆, 如图 6 所示。

使用具备参数约束求解功能的基于约束求解作图方式的 Geometry Expression 来完成“椭圆的构造”的作图,利用上文中所提到的“到两定点的距离之和为定值的点的轨迹为椭圆”的定义方法可通过下述步骤完成。

“椭圆的构造”作法 3:

- 1) 作线段 AB 、 AC 、 BC ;

2) 约束线段 AB 的长度为 a , 并锁定为 5 (以此为例, 可用其他值); 约束线段 AC 的长度为 b , 约束 BC 的长度为 $c - b$, 并锁定变量 c 为 9;

- 3) 设定参数 b 的变化范围为 $\frac{c-a}{2} \leq b \leq \frac{c+a}{2}$;

- 4) 选定点 C 以 AB 为对称轴, 作对称点 C' ;

- 5) 以参数 b 作驱动参数, 在 $\left[\frac{c-a}{2}, \frac{c+a}{2}\right]$ 范围内作点 C 和点 C' 的轨迹, 得到如图 7 所示的椭圆。

从上述作图方法可以看出,利用基于约束求解作图方式完成“椭圆的构造”,用户不需要任何软件的使用技巧,其作图步骤完全可从定义出发,两定点为 $A、B$; $AC+BC$ 为定值 c ; 当 AC 在一定范围内变化时,点 C 的轨迹为 $AC+BC=c$ 的点的轨迹。当用户修改 $a、b、c$ 的值为非初始值时,可观察点 C 的轨迹的变化情况,包括退化情况,从而进行一定的研究性学习。

2.2 “三角形的内切圆”的作图对比

要完成“三角形的内切圆”的构造,使用几何画板和超级画板的用户必须具备通过分析“三角形的内切圆与三边相切,因此,圆心到三边距离相等”这一知识点,然后得到“三角形的内切圆的圆心是三角形两角的角平分线的交点”的结论。可以通过下述步骤完成“三角形内切圆”的构造。

“三角形的内切圆”作法 1:

- 1) 构造三角形 ABC ;
- 2) 依次选择点 A, B, C , 作 $\angle ABC$ 的角平分线 l_1 ; 同样的方法作 $\angle BAC$ 的角平分线 l_2 ;
- 3) 选择 l_1 和 l_2 , 作交点 O ;
- 4) 依次选择点 O 和线段 BC , 作过点 O 与 BC 垂直的直线, 交点为 P ;
- 5) 依次选择点 O 和点 P , 作“已知圆心和圆上一点的圆”。

三角形内切圆的构造图如图 8 左图所示,可隐藏角平分线和垂线等使所作几何图形更加美观和简介,如图 8 右图所示。

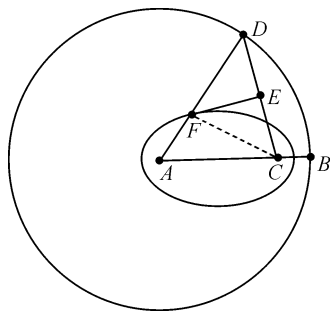


图 6 “椭圆的构造”作法 1 示意图

Fig. 6 Sketch map of drawing method 1 for “construction of ellipse”

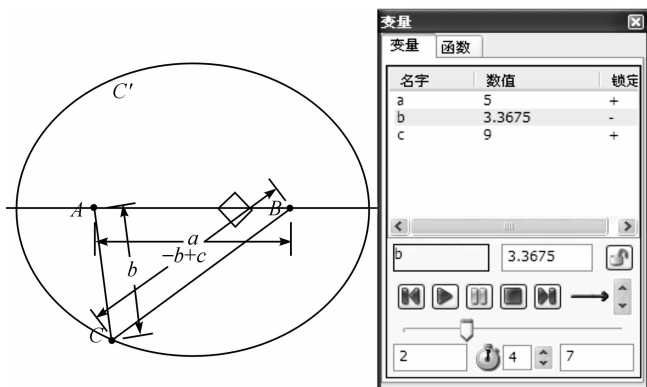


图 7 “椭圆的构造”作法 3 的示意图

Fig. 7 Sketch map of drawing method 3 for “construction of ellipse”

如果使用基于约束求解作图方式的 Geometry Expression来完成三角形内切圆的作图,用户不需要掌握三角形内切圆的性质,只需要通过构造草图,添加约束,系统通过约束求解来完成作图,具体作图步骤如下。

“三角形的内切圆”作法 2:

- 1) 构造三角形 ABC ;
- 2) 在三角形内部构造圆 D ;
- 3) 依次选择圆 D 和线段 AB , 选择约束“圆与直线相切”, 完成圆 D 与 AB 的相切; 使用相同的方法完成圆 D 与线段 BC 和线段 AC 的相切。

上述约束求解作图过程中几何图形之间的变化过程如图 9 所示。

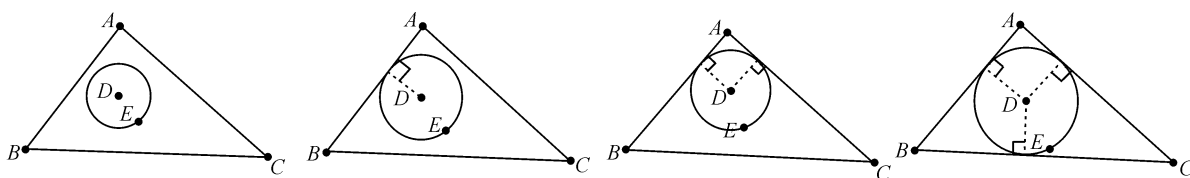


图 9 “三角形的内切圆”作法 2 示意图

Fig. 9 Sketch map of drawing method 2 for inscribed circle of triangle

Geometry Expression 软件是基于代数方法的约束求解技术,因此,用户可选择点 D 查看其坐标,如图 10 所示,在此表达式中所涉及的各项参数在图形中有标注显示。通过图 10 可发现该点的坐标的代数表示非常复杂,涉及角度、向量、长度等,用户无法轻松地从此式中发现点 D 所满足的几何特征,很难作进一步的研究性学习。

$$z_0 \Rightarrow \left(\frac{d_0 U_0 + d_1 U_0 + U_0 \sqrt{d_0^2 + d_1^2 - 2d_0 d_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)} + d_0 d_1 \cos(\theta_0) + d_0 d_1 \cos(\theta_1)}{d_0 + d_1 + \sqrt{d_0^2 + d_1^2 - 2d_0 d_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}}, \right. \\ \left. \frac{d_0 V_0 + d_1 V_0 + V_0 \sqrt{d_0^2 + d_1^2 - 2d_0 d_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)} + d_0 d_1 \sin(\theta_0) + d_0 d_1 \sin(\theta_1)}{d_0 + d_1 + \sqrt{d_0^2 + d_1^2 - 2d_0 d_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}} \right)$$

图 10 点 D 的坐标的代数表达式

Fig. 10 Algebraic expression for coordinate of point D

2.3 “勾股定理的学习”作图对比

“勾股定理”是中学几何中一节重要的学习内容,教师如何利用动态几何软件来直观地动态地展现直角三角形的“ $a^2 + b^2 = c^2$ ”这一性质,也就是勾股定理的证明需要颇费心思。文献[8]中利用面积法、裁剪法、赵爽弦图等方法构造了如图 11 所示的一些几何图形来展示和证明勾股定理;文献[9]中利用面积法和验证法对比了使用不同的动态几何软件构造直角三角形的方法和步骤。

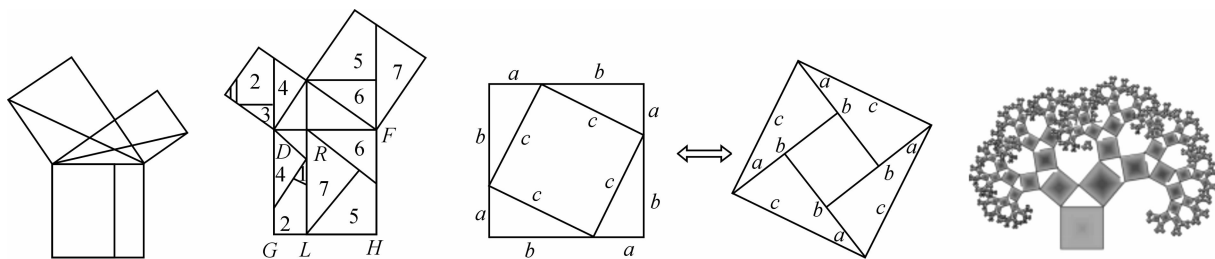


图 11 勾股定理的证明

Fig. 11 Proof graphs for Pythagorean Theorem

如果用户欲构造边长为“ $3a$ 、 $4a$ 、 $5a$ ”的三角形,当参数 a 变化时,通过观察三角形形状、测量三角形的角度来体验和观察直角三角形的性质,上述作法都无法完成。如果使用 Geometry Expression 软件来作上述操作,可通过如下步骤完成:

- 1) 构造任意三角形 ABC ;
- 2) 选择线段 AB , 约束其长度为 $5a$, 类似操作约束 $BC=4a$, $AC=3a$ 。

当 a 在一定范围内变化时,用户可发现三角形三边保持一定的比例关系从小到大变化,而 Z_0 始终等于 $\frac{\pi}{2}$ (图 12)。

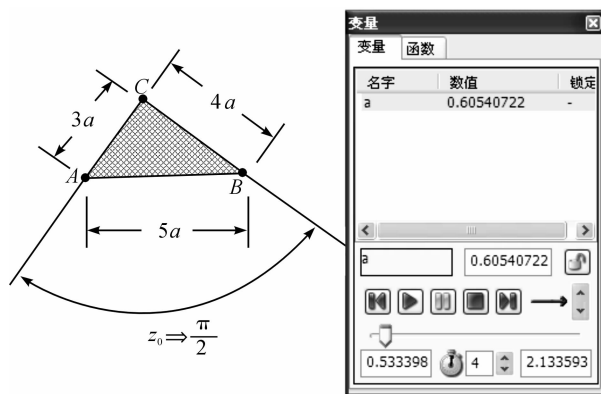


图 12 “勾股定理的学习”图形

Fig. 12 Study of Pythagorean Theorem

3 结 语

基于构造作图方式相较基于约束求解作图方式的优点是作图功能更丰富,例如迭代功能、多点驱动的图元的轨迹等;其不足之处在于用户需要具备一定的几何背景知识和作图技巧才能完成某些作图问题,且一旦完成几何对象的构造,几何对象之间的约束关系无法修改,并且对涉及参数约束求解的问题无法完成。而基于约束求解作图方式相较基于构造作图方式更加自然,更加符合人的作图习惯,可解决包括参数约束求解的作图问题。因此,如果能够开发 2 种作图方式相结合的动态几何软件,将使动态几何作图的智能性更高,解决问题更广泛,应用性更强。

参考文献:

- [1] Jackiw N. The Geometry's Sketchpad[CP]. Berkely: Key Curriculum Press, 1995.
- [2] 张景中, 李传中. Z+Z 智能教育平台: 超级画板[CP/OL]. <http://www.chaojihuan.com/zh-CN/index.html>.
- [3] Hohenwarter M. GeoGebra[CP/OL]. <http://geogebra.org>.
- [4] Laborde J M, Bellemain F. Gabri-Geometry II[CP]. Dallas: Texas Instruments, 1998.
- [5] Saltire Software. Geometry Expressions[CP/OL]. <http://www.geometryexpression.com>.
- [6] 张海强, 姜堰君. 基于超级画板的圆锥曲线定义作图[J]. 中学数学月刊, 2013(11): 39-40.
- [7] 张景中. 超级画板在高中数学教学中的应用(续完)[J]. 高等函授学报: 自然科学版, 2008(2): 3-9.
- [8] 徐章韬. 信息技术背景下的勾股定理[J]. 中学数学, 2011(6): 60-63.
- [9] 纪颖, 鲁子芸, 褚湛. 常见中小学数学教学软件的比较[J]. 中学信息技术教育, 2007(7/8): 126-128.