浙江科技学院学报，第 26 卷第 3 期，2014 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 26 No. 3，Jun. 2014

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2014.03.015

# 微积分教学中的反例

殷炜栋
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

**摘　要：**对多元微积分中比较容易混淆的地方，比如极值和最值、可微性和方向导数、累次极限和极限的相关方面进行了进一步澄清，给出了这些方面的反例，并进行了较详细的分析。

**关键词：**极值；累次极限；可微
**中图分类号：**G642.3；O172　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1671-8798(2014)03-0232-04

# Some counter-examples in calculus

YIN Weidong
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

**Abstract：**Some topics，which may easily cause confusion in calculus education，are clarified，for example local vs. global extreme values，differentiability vs. directional derivatives，and limits vs. iterated limits. Counter-examples are constructed and analyzed.

**Key words：**extreme values；iterated limits；differentiability

在微积分中，有不少地方是学生容易误解或较难理解的，比如多元函数中的可微与方向导数关系、累次极限与极限的区别等。反例可以使学生比较直接地发现其中的区别与联系，进而更好地理解这些内容。所以，反例教学是微积分教学中很有效的一种方式。在这方面有不少书籍可以参考，比如文献[1]，里面收集了很多经典的反例；此外还有很多参考文献，如文献[2]、文献[3]和文献[4]。本研究又构造了几个新的反例，希望有助于解决这方面的一些难点。

## 1　极值和最值

二元（多元）函数的极值问题是微积分教学中偏导数的一个很好的应用。通常来说，连续函数只有在有界闭域中才能保证有最值，见文献[5-6]。但全平面上的二次多项式是个例外：本质上这是由于它总可

**收稿日期：**2014-04-01
**基金项目：**浙江科技学院科研启动基金资助项目（F701108D02）；浙江科技学院理学院院级研究培育基金项目（2014LXY023）
**作者简介：**殷炜栋（1980—　），男，浙江省嘉兴人，讲师，博士，主要从事几何分析研究。

以(通过坐标变换)写成完全平方的和或差的形式(至多差个常数项)，所以它总是只有一个驻点；一旦此驻点是局部极小(大)值，那它必然是整体最小(大)值。可能有学生会问：如果一个全平面上的光滑函数，只有一个驻点且是局部极值点，那它是否一定是最值点，就像是二次多项式的例子一样？这个问题提得好，但答案是否定的，请看下例：

记

$$h(x,y)=\begin{cases} y^2+x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{y+1}} & \text{如果 } y>-1, \\ 1 & \text{如果 } y=-1, \\ y^2+x\mathrm{e}^{\frac{1}{y+1}} & \text{如果 } y<-1。\end{cases}$$

那么，首先由于

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-1)} h(x,y)=1=h(x_0,-1)$$

所以 $h(x,y)$ 是全平面的连续函数；其次，$h(x,y)$ 在全平面都存在(连续)的偏导数，这是因为(只需要检验当 $y=-1$ 时的情形即可)：

$$\lim_{y\to(-1)^+}\frac{h(x_0,y)-h(x_0,-1)}{y+1}=-2=\lim_{y\to(-1)^-}\frac{h(x_0,y)-h(x_0,-1)}{y+1},$$

也即 $h_y(x_0,-1)=-2$；而当 $y=-1$ 时，$x$ 方向的偏导数显然是 $h_x(x_0,-1)=0$。

**断言：**$(0,0)$ 是 $h(x,y)$ 的唯一的驻点，且是局部极小值点。

**证明：**只需要直接验证即可，当 $y>-1$ 时，有

$$\begin{cases} h_x=2x\mathrm{e}^{-\frac{1}{y+1}} \\ h_y=2y+\mathrm{e}^{-\frac{1}{y+1}}\dfrac{x^2}{(y+1)^2}。\end{cases}$$

所以 $p=(0,0)$ 是驻点。此外，当 $y<-1$ 时，有 $h_x(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{y+1}}\neq 0$，且 $h_y(x,-1)=-2\neq 0$，所以 $p$ 是全平面唯一的驻点。此外 $h_{xx}(p)=2\mathrm{e}^{-1}>0$，$h_{xy}(p)=0$，$h_{yy}(p)=2$，所以在 $p$ 点的判别式为：

$$D(p)=h_{xx}(p)h_{yy}(p)-h_{xy}^2(p)=4\mathrm{e}^{-1}>0,$$

也即 $p$ 是局部极小值点。但因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x,-2)=-\infty$，明显地，$p$ 不是最小值点。

如果仔细分析上面的例子，产生这种情况的根本原因是 2 个偏导数可以不同时为 0，造成了只有唯一驻点却不是最值的情况。而这种现象在一元函数里是不会出现的，因为这时只有一个方向的导数。更确切地说，整个实轴上定义的一元可微函数，如果它只有一个驻点，且是局部极小(大)值点，那它必然也是整体的最小(大)值点，这是一元微积分和多元微积分中一个显著的差别。

## 2　多元函数的极限和累次极限

在多元微积分里，给定一个函数 $f$ 和其定义域中的一点 $p$，即使 $f$ 在 $p$ 点的 $x$-方向和 $y$-方向的累次极限都存在且相等，也不能保证 $f$ 在 $p$ 点的极限存在。教科书中一个典型的例子是

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{如果 } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{如果 } (x,y)=(0,0)。\end{cases}$$

由于沿着不同的直线路径 $\Gamma_k: y=kx, k\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Gamma_k}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{k^2+1},$$

其值和路径有关，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\text{不存在},$$

不过，明显地，$f(x,y)$沿着 $x$-方向和 $y$-方向的累次极限都存在且相等，

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=0。$$

反过来自然可以问：如果一个二元函数，它在一点处的极限存在，那是否就保证在该点处的累次极限存在且相等呢？似乎上面的例子给人们一个错觉：多元函数在一点处极限存在是比在该点处累次极限存在更强的条件。事实上，这是不对的，即使一个多元函数在一点处极限存在，也不能保证在该点处累次极限存在，且看下面的反例。

记 $\mathscr{D}(x)$为 Dirichlet 函数，也即

$$\mathscr{D}(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } x \text{ 是有理数},\\ 0 & \text{如果 } x \text{ 是无理数}。\end{cases}$$

记 $g(x,y)=y\cdot\mathscr{D}(x)$，取点 $p=(0,0)$，那么明显地，只要 $y$ 充分小，$g(x,y)$的函数值就充分小，也即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0,$$

虽然

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} g(x,y))=0,$$

但是，由于对任意预先确定的非零 $y$ 值，

$$\lim_{x\to 0} g(x,y)\text{不存在},$$

所以，按定义不可能接着再取 $y$-方向的极限，也即

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} g(x,y)),\text{不存在}。$$

因此，从某种意义上说，二元函数的极限和累次极限是不同的概念。这里虽然只举了二元函数的例子，但明显地可以平凡地推广到多元函数。这方面在文献[1]中也可以找到类似的例子。

## 3 多元函数的可微与方向导数

在多元微积分里面，函数在一点处可微与其在该点处的偏导数有密切的联系。比如函数在一点的邻域内有 $x$ 和 $y$ 方向的偏导数，且偏导数在该点处连续，那么该函数在该点处可微；反之，不一定成立。一般的数学分析教程里，如文献[6]，都有证明和反例。

由于在一元微积分里，函数在一点处可微和其在一点处可导是等价的；而多元函数中有无穷多个方向导数，学生自然会问：2 个偏导数的条件太弱了；那一点处可微和一点处各个方向的方向导数都存在，是不是也等价呢？这也是一个很容易犯错误的地方。在给出反例之前，先看一个引理：

**引理 1** 假设给定一个二元函数 $z=f(x,y)$，它在一点 $p$ 处可微；$\boldsymbol{e}=\cos\theta\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\boldsymbol{e}_2=\langle\cos\theta,\sin\theta\rangle$是单位向量，其中 $\boldsymbol{e}_1$ 是 $x$-方向单位向量，$\boldsymbol{e}_2$ 是 $y$-方向单位向量，那么 $f$ 在 $p$ 点沿着 $\boldsymbol{e}$ 的方向导数

$$D_e f(p)=\cos\theta f_x(p)+\sin\theta f_y(p)。$$

**证明：**此引理的证明在一般数学分析教材里都能找到，为了完整起见，这里简单地重复一下。由一点处可微的定义，有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o|\Delta r|,$$

其中$|\Delta r|^2=|\Delta x|^2+|\Delta y|^2$。所以

$$D_e f(p)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(p+\Delta te)-f(p)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_x(p)\Delta x+f_y(p)\Delta y+o|\Delta t|}{\Delta t}=f_x(p)\cos\theta+f_y(p)\sin\theta。$$

从这个引理可以看到,一点处可微蕴含着在该点处各个方向的方向导数都存在,但反过来不对,如下例。

定义新的二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} sgn(x)\dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{如果}\ |y|\leqslant|x|,x\neq 0, \\ sgn(x)\dfrac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2} & \text{如果}\ |y|>|x|, \\ 0 & \text{如果}\ x=y=0。\end{cases}$$

其中 $sgn(x)=\pm 1$,是 $x$ 的符号函数。那么对于 $f(x,y)$,其实它沿着平面上每条直线 $y=kx$ 或 $x=ky$,都可以看成是线性函数,也即

$$f(x,y)=sgn(x)\cdot\alpha(k)\cdot r,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\alpha(k)$是关于 $k$ 的一个常数;所以每个方向的方向导数显然都是存在的。

如果记 $\boldsymbol{e}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2$,$p=(0,0)$,那么有

$$D_{e_1}f(p)=f_x(p)=0,$$
$$D_{e_2}f(p)=f_y(p)=0,$$
$$D_e f(p)=1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}(f_x(p)+f_y(p))。$$

所以,由**引理 1** 可知,$f(x,y)$在 $p$ 点是不可微的($f$ 在原点的不可微性也可以直接从定义看出来)。

从**引理 1** 和例子可以看到,对于多元函数来说,一点处可微是比一点处各个方向的方向导数都存在更强的条件。粗略地说,一点处可微描述的是函数在该点处整体的光滑性,而方向导数只刻画函数在该点处局部(一个方向)的光滑性。所以,前者应该是强于后者的条件。

## 参考文献:

[1] 汪林. 数学分析中的问题和反例[M]. 昆明:云南科学技术出版社,1990.

[2] 杜春雨. 高等数学中反例的研究[J]. 高等数学研究,2008,11(5):26-28.

[3] 方倩珊. 高等数学教学中的反例[J]. 高等数学研究,2012,15(2):47-51.

[4] 王涛. 于艳华. 高等数学中反例教学研究[J]. 华北科技学院学报,2011,8(3). 95-97.

[5] Finney R L,Weir M D, Giordano F R. 托马斯微积分[M]. 叶其孝,王耀东,唐兢,译. 10 版. 北京:高等教育出版社,2003:959-970.

[6] 常庚哲,史济怀. 数学分析教程[M]. 北京:高等教育出版社,2003.