

创意平板折叠桌优化设计方案

侍冰雪^a, 朱家明^b, 朱韶东^b, 魏慧茹^b

(安徽财经大学 a. 金融学院; b. 统计与应用数学学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 针对创意平板折叠桌的最优设计方案和求解最优加工参数, 通过分析折叠桌动态变化过程, 综合使用多目标线性规划、非线性拟合等方法, 运用 Matlab7.0 和 Lingo 等软件求解, 计算出了在给定任意折叠桌的高度和圆形桌面直径情况下的最优加工参数, 并给出了折叠桌最优设计通用方案和实例分析。

关键词: 创意平板折叠桌; 优化设计方案; 线性规划; 非线性拟合; Matlab7.0; Lingo

中图分类号: TS664.01

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2014)06-0429-07

Creative design scheme optimization of flat folding table

SHI Bingxue^a, ZHU Jiaming^b, ZHU Shaodong^b, WEI Huiru^b

(a. School of Finance; b. School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui Finance and Economics University, Bengbu 233030, China)

Abstract: In view of the optimal design scheme and the optimal processing parameter solution of creative flat folding table, using the method of multi objective linear programming and nonlinear fitting, we firstly analyze the dynamic change process of the relative flat folding table. With the help of Matlab7.0 and Lingo software, we calculated the optimal processing parameters while giving the height of a folding table and the diameter of the round folding table. Furthermore, we make the general optimal design scheme of folding table and analyze an example.

Key words: creative flat folding table; optimized design scheme; linear programming; nonlinear fitting; Matlab7.0; Lingo

随着城市住房成本的提高,以及网络销售越来越普及,折叠家具因集空间利用率高与运输存放便捷等优点而成为一种时尚,为广大消费者所青睐。创意折叠平板桌注重在满足功能性的前提下表达桌子的美观和自动化性能,符合现代人的审美和个性化需求。本设计方案能够根据客户任意设定的

收稿日期: 2014-11-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(11301001);安徽财经大学教研项目(acjydz201429)

作者简介: 侍冰雪(1994—),女,安徽省泗县人,2012级金融工程专业本科生。

通信作者: 朱家明,副教授,硕士,主要从事应用数学与数学建模研究。

折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状,给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数,使得生产的折叠桌尽可能地接近客户所期望的形状(详见 2014 年全国大学生数学建模 B 题^[1])。

1 任意平板尺寸、高度、圆形桌面直径的折叠桌设计方案

1.1 研究思路

以桌面圆心为原点构造空间坐标系, x 及 y 轴正方向如图 1 所示, z 轴正方向垂直于桌面向上。由于折叠桌高度对称,因此以四分之一的桌腿为对象研究,平面解析图见图 1。

折叠桌的设计要做到稳定性好、加工方便、用材最少,对于任意给定的折叠桌的高度和圆形桌面直径的设计要求,主要从折叠桌的材料长度、开槽长度及折叠桌的稳定性 3 个方面来设计折叠桌的最优模型。为了使加工方便,令每边的桌腿数为 20。完全折叠时,除第一条桌腿与桌面的交点 D_1 外,其余拐点均位于圆形桌面的边上;从桌子的外形美观考虑^[2],令第二条桌腿对应的圆形桌面的弦长的一半为 $g_2 = 3g_1$,如图 1,将钢筋在桌腿上的位置点与桌面连接点间的距离设为 s ,则 $s = \alpha L_1$ 。图 1 为折叠桌完全折叠时的状态即状态 1,图 2 为完全展开时的状态即状态 2。

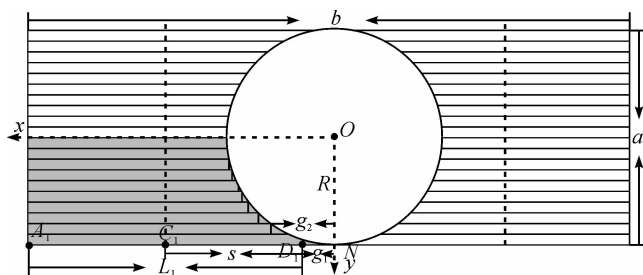


图 1 折叠桌完全折叠解析图

Fig. 1 Analytic figure of folding table fully folded



图 2 折叠桌完全展开图

Fig. 2 Folding table fully expanded

1.2 数据处理

1.2.1 材料长度

完全折叠时长方形材料的长度为:

$$b = 2 \left(L_1 + \frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2} \right) \quad (1)$$

1.2.2 开槽长度

定义:开槽长度是折叠桌完全折叠时钢筋与桌腿的交点到桌面连接点的距离与桌子完全展开时钢筋与桌腿交点到桌面连接点的距离的差值(第 i 条桌腿为从外依次向里数的某条桌腿)。

根据前述分析,运用上面公式可计算折叠桌在 2 种状态下的关键点坐标,详见表 1。

表 1 折叠桌的关键点坐标

Table 1 Coordinate of the key point in the folding table

cm

关键点	$i=1$	$i=2,3,\dots,10$
与桌面底部交点	$D_1 \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2}, \frac{19}{20}R, 0 \right)$	$D_i \left(\sqrt{R^2 - \left(\frac{11-i}{10}R \right)^2}, \frac{21-2i}{20}R, 0 \right)$
状态 1 时钢筋连接点	$C_1 \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2} + \alpha L_1, \frac{19}{20}R, 0 \right)$	$C_i \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2} + \alpha L_1, \frac{21-2i}{20}R, 0 \right)$
状态 2 时钢筋连接点	$G_1 \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2} + \alpha L_1 \cos \theta, \frac{19}{20}R, -\alpha L_1 \sin \theta \right)$	$G_i \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10} \right)^2} + \alpha L_1 \cos \theta, \frac{21-2i}{20}R, -\alpha L_1 \sin \theta \right)$

在状态 1 和状态 2 下,桌腿与桌面底部交点 D_i 到对应钢筋连接点 C_i 的距离分别为:

$$n_i = \frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10}\right)^2} + \alpha L_1 - \sqrt{R^2 - \left(\frac{11-i}{10}R\right)^2} \quad (2)$$

$$m_i = \sqrt{\left(R^2 - \left(\frac{11-i}{10}R\right)^2 - \left(\frac{1}{3} \sqrt{R^2 - \left(\frac{9R}{10}\right)^2} + \alpha L_1 \cos \theta\right)^2 + (-\alpha L_1 \sin \theta)^2\right)}, \quad (3)$$

$$(i=2,3,\dots,10)$$

每条桌腿的开槽长度为 m_i 与 n_i 的差值 d_i , 即: $d_i = m_i - n_i$ 。

1.2.3 折叠桌的稳定性

结构具有阻碍翻倒或移动的特性,就是结构的稳定性^[3]。稳定性好要求首先对桌腿和钢筋进行受力分析。状态2时,所有桌腿中只有最外面的4条桌腿承受来自桌子本身和桌子上物体重力之和 F ,其余桌腿分担的沿桌腿方向的拉力通过传递最后由第一条桌腿承受,不考虑钢筋自身的重力。作出整体效果图,并分别对第 i 条桌腿、钢筋、第一条桌腿进行受力分析(图3)。

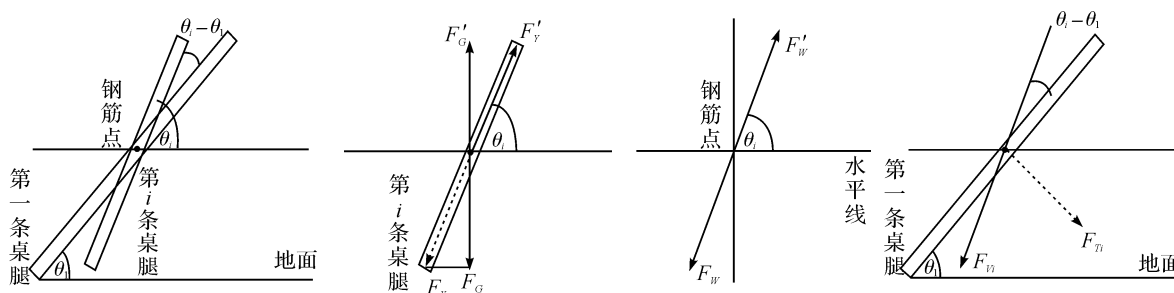


图3 受力分析图

Fig. 3 Force analysis

在图3中,第 i 条桌腿承受的竖直向下的力均为 $F_G = \frac{F}{40}$,沿桌腿方向的受力为 $F_Y = \frac{F}{40 \sin \theta_i}$,钢筋给第 i 条桌腿的支持力 F_G' 竖直向上,在沿桌腿向下方向的分力为 $F_Y' = F_Y$;钢筋所受第 i 条桌腿给予的压力大小即为 $F_w = F_Y$,方向沿桌腿向下;由于完全展开时钢筋相对于地面静止,因此钢筋在受到第 i 条桌腿所给压力的同时,又受到第一条腿给予的支撑力 $F_w' = F_Y$;第一条桌腿所受的经钢筋传递的第 i 条桌腿的压力大小即为 $F_{v_i} = F_Y$,则第一条桌腿所受钢筋给予的总压力为 $F_v = \sum_{i=1}^{10} \frac{F}{40 \sin \theta_i}$ 。

1.3 研究方案

根据本题实际意义,最优方案中要使得长方形材料长度最小、开槽长度最小和稳定性最好,即以第一条桌腿所受钢筋给予的总压力 F_v 最大来确定目标函数和约束条件^[4]分别为:

$$\begin{cases} \min Z_1 = \sum_{i=1}^{10} d_i \\ \min Z_2 = 2L \\ \max Z_3 = \sum_{i=1}^{10} \frac{\sin(\theta_i - \theta_1)}{40 \sin \theta_i} F_G \end{cases}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} d_i = \sqrt{\left(\left(s_i \cos \theta_2 - \sqrt{R^2 - \left(\frac{11-iR}{10}\right)^2}\right)^2 + (s_i \sin \theta_i)^2\right)} + s_i - 11.44 \\ \tan \theta_i = \frac{s \sin \theta_1}{s \cos \theta_1 + 5.81 - \sqrt{R^2 - \left(\frac{11-iR}{10}\right)^2}}, i = 1, 2, \dots, 10 \\ \theta_i < \theta_{i+1}, 0 < \theta_i < \pi, i = 1, 2, \dots, 10 \\ L_1 > h - g, L_1 > s \end{cases}$$

对于任意给定的折叠桌高度、圆形桌面直径及满足折叠桌的稳定性等设计要求,只需将数据代入上

述模型,即可求得使客户满意的折叠桌的材料长度、开槽长度及钢筋连接点 3 个加工参数。

2 对特定折叠桌的动态描述及加工方案

2.1 折叠桌参数及研究目标

给定的长方形平板尺寸为 $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$, 每根木条宽 2.5 cm , 即每边桌腿数为 20, 连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置, 折叠后桌子的高度为 53 cm 。完全展开时的桌脚边缘线指 20 个桌脚相连构成的空间曲线, 在 Matlab7.0 中对 20 个空间点作图并拟合空间曲线, 进而求出由 2 个空间平面联立的桌脚边缘线方程。

2.2 折叠桌的加工方案

将 $b=120\text{ cm}$, $R=25\text{ cm}$, $h=53\text{ cm}$ 代入 1.3 的研究方案, 并结合实际利用 Matlab7.0 求解^[5], 得出桌腿上的开槽长度, 见表 2。

表 2 每条桌腿上的开槽长度

Table 2 Length of groove in each table leg

cm

第 i 条桌腿	n_i	m_i	d_i	第 i 条桌腿	n_i	m_i	d_i
1	27.91	27.91	0	6	25.83	9.59	16.24
2	25.08	17.5	7.58	7	26.07	8.65	17.42
3	25.06	14.65	10.41	8	26.26	8.01	18.25
4	25.27	12.5	12.77	9	26.38	7.63	18.75
5	25.54	10.85	14.69	10	26.42	7.5	18.92

对桌脚边缘线在空间的位置进行数学描述时, 首先根据第一条桌腿与桌面底部连接点 $D_1(25, 1.25, 0)$ 、折叠时钢筋与桌腿的接点 $C_1(32.5, 23.75, 0)$ 、展开时钢筋与桌腿的接点 $G_1(16.55, 1.25, -28.03)$ 及展开时的桌脚点 $E_1(13.81, 1.25, -36.16)$, 求得第二条桌腿的数据, 然后依次求得其余 8 条桌腿上各点的空间坐标(表 3)。

表 3 折叠桌上关键点的坐标

Table 3 Coordinate of key point in folding table

cm

第 i 条桌腿	与桌面底部的接点 D_i	状态 1 时钢筋的接点 C_i	状态 2 时钢筋的接点 G_i	状态 2 时桌脚点 E_i
1	(25, 1.25, 0)	(32.5, 23.75, 0)	(16.55, 1.25, -28.03)	(13.81, 1.25, -36.16)
2	(24.87, 3.75, 0)	(32.5, 3.75, 0)	(16.55, 3.75, -28.03)	(13.78, 3.75, -36.33)
3	(24.49, 6.25, 0)	(32.5, 6.25, 0)	(16.55, 6.25, -28.03)	(13.76, 6.25, -36.85)
4	(23.85, 8.75, 0)	(32.5, 8.75, 0)	(16.55, 8.75, -28.03)	(13.73, 8.75, -37.7)
5	(22.91, 11.25, 0)	(32.5, 11.25, 0)	(16.55, 11.25, -28.03)	(13.76, 11.25, -38.94)
6	(21.65, 13.75, 0)	(32.5, 13.75, 0)	(16.55, 13.75, -28.03)	(13.99, 13.75, -40.58)
7	(20, 16.25, 0)	(32.5, 16.25, 0)	(16.55, 16.25, -28.03)	(14.53, 16.25, -42.62)
8	(17.85, 18.75, 0)	(32.5, 18.75, 0)	(16.55, 18.75, -28.03)	(15.67, 18.75, -45.09)
9	(15, 21.25, 0)	(32.5, 21.25, 0)	(16.55, 21.25, -28.03)	(17.78, 21.25, -47.91)
10	(5, 23.75, 0)	(32.5, 23.75, 0)	(16.55, 23.75, -28.03)	(27.91, 23.75, -53)

2.3 对桌脚边缘线的数学描述

该折叠桌的高度是对称的, 由选取的 10 条桌腿写出在同一边的另外 10 条桌腿的空间坐标, 根据 20 个桌脚在折叠桌完全展开时的空间坐标, 利用 Matlab7.0 编程^[6]作出桌脚边缘线拟合曲线的空间图形(图 4)。

根据空间曲线的性质, 将拟合的曲线看作 2 个空间平面的交线。桌脚边缘线分别在 XOZ 和 YOZ 平面上投影, 得到平面曲线图(图 5), 分别以两平面曲线为底线作垂直于 XOZ 和 YOZ 平面的 2 个曲面

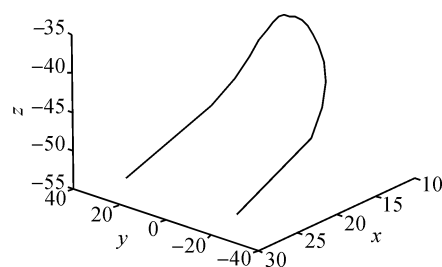


图 4 桌脚边缘线空间图

Fig. 4 Three-dimensional map of table's feet edge line

P 、 Q , 2 个曲面的交线所处位置就是桌脚边缘线在空间坐标系中的位置, 如图 6 所示。

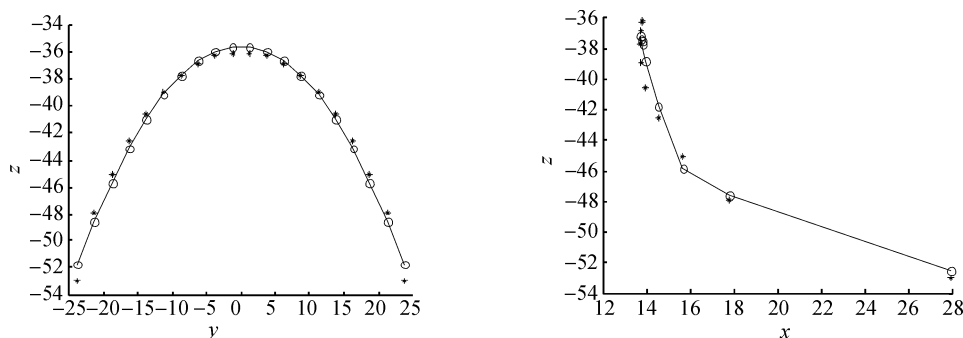


图5 桌脚边缘线平面投影曲线图

Fig. 5 Projection curve of table's feet edge line

对于桌脚边缘线上确定的一点 M , 给定 z 值, x 和 y 的绝对值也就确定了; 在曲面 P 上给定 z 值, y 的值可以唯一地确定, 在 YOZ 平面上给定 z 值, x 的值可以唯一地确定。因此, 桌脚边缘线上确定的一点 M 在曲面 P 上的同时也在 Q 曲面上, 依据空间曲线的性质, 故桌脚边缘线可以用曲面 P 和 Q 联立的方程来表示。桌脚边缘线分别在 XOZ 和 YOZ 平面上投影, 利用 Matlab7.0 编程, 得到 2 条曲线的方程, 进一步得到桌脚边缘线的方程为:

$$K: \begin{cases} F(x, y, z) = -0.0287y^2 - 35.5482z = 0 \\ G(x, y, z) = -0.598x^3 + 3.6997x^2 - 74.3585x + 441.0327 - z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

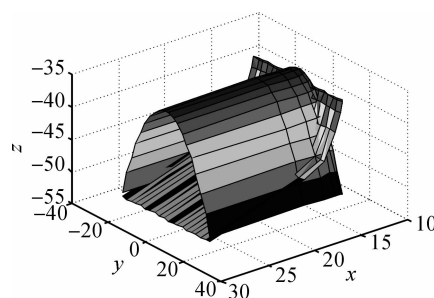


图6 桌脚边缘线对应空间曲面图

Fig. 6 Configuration to corresponding edge line

3 折叠桌设计的通用方案

3.1 研究思路

在任意平板尺寸、高度、圆形桌面直径的折叠桌设计模型的基础上, 将圆形桌面推广到任意形状的桌面。针对任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状, 与设计方案中的研究思路一致, 从材料长度、开槽长度和折叠桌的稳定性 3 个方面作分析, 建立一般模型, 求解所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数, 并根据一般模型给出一种平板桌的设计方案。

3.2 方案准备

综合考虑桌子的美观、加工方便及实用性, 将所研究的桌子均设定为对称形状, 整块材料可以分为相同的 4 块, 桌腿的总数量均与设计方案中的桌腿数一致, 为 40 条, 桌子厚度为 3 cm。如图 7 所示, 在状态 1 时, 桌面边缘线为 $y=f(x)$, 第 i 条桌腿与桌面的连接点 D_i 在桌面边缘线上; 在状态 2 时, 所有桌脚所在点相连接, 所构成的空间曲线即为桌脚边缘线。

3.3 研究方法

此时折叠桌上关键位置点坐标如表 4 所示。

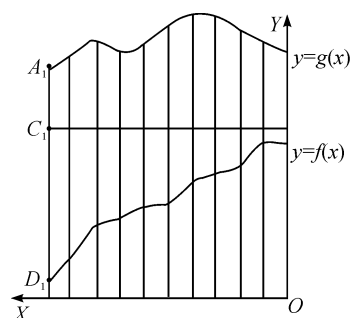


图7 桌子完全折叠时部分桌面平面图

Fig. 7 Part desktop when table fully folded

表 4 折叠桌的关键点坐标($i=1,2,3,\dots,10$)

Table 4 Coordinate of key point in the Folding table

cm

关键点	状态 1	状态 2
桌脚点	$A_i \left(\frac{21-2i}{20}R, L_i + f\left(\frac{10-i}{10}R\right), 0 \right)$	$B_i \left(\frac{21-2i}{20}R, u\left(\frac{21-2i}{20}R\right), v\left(\frac{21-2i}{20}R\right) \right)$
钢筋点	$C_i \left(\frac{21-2i}{20}R, f\left(\frac{9}{10}R\right) + z, 0 \right)$	$E_i \left(\frac{21-2i}{20}R, f\left(\frac{9}{10}R\right) + z\cos\theta, z\sin\theta \right)$
桌腿与桌面连接点	$D_i \left(\frac{21-2i}{20}R, f\left(\frac{10-i}{10}R\right), 0 \right)$	$D_i \left(\frac{21-2i}{20}R, f\left(\frac{10-i}{10}R\right), 0 \right)$

1) 由第一条桌腿长度, 求得桌子材料的长度 $S = 2L_1 + 2f\left(\frac{9}{10}R\right)$

2) 开槽长度 $d_i = n_i - m_i$,

其中

$$m_i = f\left(\frac{9}{10}R\right) + z - f\left(\frac{10-i}{10}R\right),$$

$$n_i = \sqrt{\left(f\left(\frac{9}{10}R\right) + z\cos\theta - f\left(\frac{10-i}{10}R\right)\right)^2 + (z\sin\theta)^2}$$

3) 第一条桌腿上 $F_T = \sum_{i=2}^{10} F_{Ti}$,

其中

$$F_{Ti} = \frac{F_G}{40} \frac{\sin(\theta_i - \theta)}{\sin\theta_i},$$

$$\tan\theta_i = \frac{z\cos\theta}{f\left(\frac{9}{10}R\right) + z\cos\theta - f\left(\frac{10-i}{10}R\right)}$$

最优设计方案即为使 1)、2)、3) 最优的设计模型:

$$\begin{cases} \min Z_1 = 2L_1 + 2f\left(\frac{9}{10}R\right) \\ \min Z_2 = \sum_{i=2}^{10} (n_i - m_i) \\ \max Z_3 = \sum_{i=2}^{10} F_i \end{cases}$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} d_i = \sqrt{\left(f\left(\frac{9}{10}R\right) + z\cos\theta - f\left(\frac{10-i}{10}R\right)\right)^2 + (z\sin\theta)^2} - \\ f\left(\frac{9}{10}R\right) + z - f\left(\frac{10-i}{10}R\right) \\ \tan\theta_i = \frac{z\cos\theta}{f\left(\frac{9}{10}R\right) + z\cos\theta - f\left(\frac{10-i}{10}R\right)}, i = 1, 2, \dots, 10 \\ \theta_i < \theta_{i+1}, 0 < \theta_i < \pi, i = 1, 2, \dots, 10 \\ L_1 > h - g, L_1 > z \end{cases}$$

3.4 实例分析

取桌面形状为椭圆形, 且 $2x^2 + y^2 = R^2$, 令椭圆长半径 $R = 40$ cm, 厚度 $t = 3$ cm, 高度 $h = 78$ cm, 代入模型, 得出第一条桌腿长 $L_1 = 79.72$ cm, 在状态 2 时, 第一条桌腿与地面夹角 $\theta = 75^\circ$, 钢筋与第一条桌腿的交点距离桌面 $z = 40$ cm, 所研究的 10 条腿长度具体数据见表 5。

表 5 桌面边缘线为椭圆形时桌腿长

Table 5 Length of table leg when the edge of desktop is oval

cm

第 i 条桌腿	长度	第 i 条桌腿	长度
1	77.67	6	64.08
2	73.03	7	63.02
3	69.80	8	62.29
4	67.37	9	62.29
5	65.51	10	61.72

利用 Matlab7.0 编程^[6],分别作出第一条桌腿与地面夹角分别为 0° 、 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 67.5° 、 75° 、 80° 时的空间图,表示出折叠桌的动态变化过程,如图 8 所示。

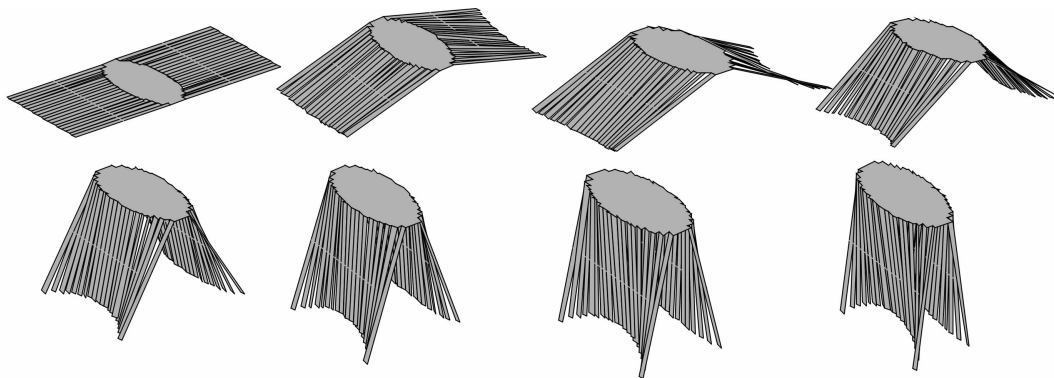


图 8 折叠桌动态变化过程

Fig. 8 Dynamic change process of folding table

由此可见,推广的设计折叠桌的通用模型具有可行性,对于设定的其他形状的桌面,如六边形、八边形、十二边形等形状的桌面,再结合给定的合理的桌子高度和桌脚边缘线形状,同样可求出最优的设计加工参数。

4 结 语

本研究首先从圆形桌面着手,通过对折叠桌的材料长度、开槽长度及稳定性 3 个方面的分析,采用了多目标规划法,给出了折叠桌的最优设计模型;然后,以已知平板尺寸、高度和桌面直径的折叠桌为例,将各参数代入设计模型,对折叠桌的运动过程进行动态描述,采用非线性拟合法,给出了完全展开时折叠桌的桌脚边缘线的空间方程;最后,将模型推广到一般情况,对任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状、大小,以及桌脚边缘线的大致形状,给出了求解加工参数的通用模型,并以椭圆为例,利用 Matlab7.0 作出 8 张折叠桌的动态变化过程图,验证了创意平板折叠桌优化设计方案的可行性。该方案兼顾美观性与实用性,为平板折叠桌的优化设计提供了一定的参考。

参考文献:

- [1] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2014 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题[EB/OL]. (2014-09-11) [2014-09-15]. http://www.mcm.edu.cn/html_cn/block/c61dfec317d7a5bd9b2b8efed81c8af3.html.
- [2] 李颖. 折叠网壳的初步设计评述[J]. 山西建筑, 2010, 36(29): 45-46.
- [3] 杨媛媛. 折叠网壳结构的稳定性分析[D]. 西安: 长安大学, 2006.
- [4] 任咏红. 求解非线性优化问题的非线性 Lagrange 方法[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.
- [5] 邱松强. 非线性规划的可行性控制方法及其应用[D]. 苏州: 苏州大学, 2013.
- [6] 张志勇, 杨祖樱. Matlab 教程[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2004.