浙江科技学院学报,第 27 卷第 3 期,2015 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 27 No. 3, Jun. 2015

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2015.03.001

同分布两两 NQD 序列部分和之随机和的弱大数律

沈建伟
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要: 利用两两 NQD(negatively quadrant dependent)随机变量序列部分和的弱大数律和推广的 Kolmogorov 型不等式,得到了两两 NQD 序列部分和之随机和的弱大数律,获得了与独立同分布情形相类似的结果。

关键词: 两两 NQD 序列;部分和之随机和;弱大数律
中图分类号: O211.4　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2015)03-0161-04

Weak law of large numbers for random sums of partial sums of pairwise NQD sequence of random variables

SHEN Jianwei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The weak law of large numbers for random sums of partial sums of pairwise NQD sequence of random variables is obtained by the weak law of large numbers for sum of partial sums and extended Kolmogorov-type moment inequality of pairwise NQD sequence. The available result corresponds to the result of independent and identically distributed sequence of random variables.

Key words: pairwise NQD sequence; random sums of partial sums; weak law of large numbers

1　引言及引理

随机变量序列部分和之和的极限性质,在理论和实践中均是有必要研究的。最初对部分和之和的研究,是 Resnick[1] 及 Arnold 等[2] 在研究纪录值的极限理论时发现的。当前已有不少成果,文献[3]得到了 I.I.D. 随机变量部分和之和的极限定理;文献[4]给出了对称同分布 PA 序列部分和之和的弱大数律;文献[5]去除了文献[4]中分布对称的条件,并通过对 PA 列收敛速度的限制弱化了文献[4]中定理的条件;文献[6]把文献[4-5]的结果推广到两两 PQD 序列部分和之和的弱大数律,并去除了随机变量分布对称和同分布的限制条件。在许多实际问题中,随机和比非随机和更有意义。如在破产理论中,索赔额

收稿日期: 2015-04-10
作者简介: 沈建伟(1972—　),男,浙江省萧山人,讲师,硕士,主要从事概率极限理论研究。

$\sum_{k=1}^{N(t)}X_k$(其中 $N(t)$ 是$[0,t]$中来到的索赔数目,X_k 为每次的索赔额)及几何和$\sum_{k=1}^{v}X_k$(其中 v 为服从几何分布的随机变量)等均为随机和。文献[7]利用独立情形下的 Kolmogorov 型不等式得到了 I. I. D. 随机变量序列部分和之随机和的弱大数律。受此启发,本研究得到了同分布的两两 NQD(negatively quadrant dependent)序列部分和之随机和的弱大数律,推广了前人的结果。

定义 1[8] 称随机变量 X 和 Y 是 NQD 的,若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)P(Y<y)。$$

称随机变量列$\{X_n,n\geqslant1\}$是两两 NQD 的,若对 $\forall i\neq j$,X_i 与 X_j 是 NQD 的。

文中总设 c 代表正常数,在不同的地方可以代表不同的值。$I(A)$代表集 A 的示性函数,$[X]$代表对实数 X 进行取整的函数。对于随机变量列$\{X_n,n\geqslant1\}$,记:$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,称为 X_i 的部分和;$T_n=\sum_{i=1}^{n}S_i$,称为 X_i 的部分和之和;$T_n^*=\sum_{i=1}^{n}iX_i$。显然,对于 $\forall n\geqslant1$,有 $T_n^*+T_n=(n+1)S_n$。

引理 1[8] 设随机变量 X 和 Y 是 NQD 的,则

1) $EXY\leqslant EXEY$;

2) $P(X>x,Y>y)\leqslant P(X>x)P(Y>y)$,$\forall x,y\in\mathbb{R}$;

3) 若 f,g 同为非降(或非增)函数,则 $f(X)$与 $g(Y)$仍为 NQD 的。

引理 2[9] 设$\{X_n,n\geqslant1\}$是两两 NQD 序列,且 $EX_n^2<\infty$,$\forall n\geqslant1$,记

$$T_j(k)=\sum_{i=j+1}^{j+k}(X_i-EX_i),j\geqslant0,$$

则有

1) $E(T_j(k))^2\leqslant\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2$;

2) $E[\max_{1\leqslant k\leqslant n}(T_j(k))^2]\leqslant\frac{4\log^2 n}{\log^2 2}\sum_{i=j+1}^{j+n}EX_i^2$。

引理 3[10] 设$\{X_n,n\geqslant1\}$是同分布的两两 NQD 序列,$0<p<2$,满足$\lim_{n\to\infty}n^P P(|X_1|>n)=0$,则存在实数列$\{b_n,n\geqslant1\}$,使得$\frac{S_n-b_n}{n^{1/p}}\xrightarrow{P}0,n\to\infty$。

2 主要结果

定理 1 设$\{X_n,n\geqslant1\}$是均值为零的同分布两两 NQD 序列,$\{\tau_n,n\geqslant1\}$是取正整数值的随机变量,满足

$$\frac{\tau_n}{n}\xrightarrow{p}b, \tag{1}$$

其中 b 是正常数。

A) 若$\lim_{n\to\infty}n^{1+\delta}P(|X_1|>n)=0$,$\forall\delta>0$, (2)

则有

$$\frac{T_{\tau_n}^*}{\tau_n^2}-\frac{1}{2}EY_1\xrightarrow{P}0,n\to\infty; \tag{3}$$

B) 若 $EX_n^2<\infty$,$\forall n\geqslant1$, (4)

则有

$$\frac{T_{\tau_n}}{\tau_n^2}-\frac{1}{2}EY_1\xrightarrow{P}0,n\to\infty; \tag{5}$$

其中,

$$EY_1=-nP(X_1<-n)+EX_1I\{|X_1|\leqslant n\}+nP(X_1>n)。$$

定理 1 的证明:

记

$$Y_i=-nI\{X_i<-n\}+X_iI\{|X_i|\leqslant n\}+nI\{X_i>n\}$$

因为$\{X_i,i\geqslant1\}$为两两 NQD 序列,故由**引理 1** 知$\{i(Y_i-EY_i),i\geqslant1\}$仍是均值为零的两两 NQD 序列。

记

$$T_k^{*\prime}=\sum_{i=1}^{k}iY_i,b_n=[bn],$$

则由式(2)、式(1) 可得

$$P(T_{\tau_n}^* \neq T_{\tau_n}^{*'},\tau_n \leqslant 2b_n) \leqslant P(\bigcup_{k=1}^{2b_n}\{|X_k| > n\}) \leqslant \sum_{k=1}^{2b_n} P(|X_k| > n) =$$

$$2b_n P(|X_1| > n) = 2\frac{b_n}{n} nP(|X_1| > n) = o(1)。\tag{6}$$

由式(6)、式(1) 可得

$$P(T_{\tau_n}^* \neq T_{\tau_n}^{*'}) = P(T_{\tau_n}^* \neq T_{\tau_n}^{*'},\tau_n \leqslant 2b_n) + P(T_{\tau_n}^* \neq T_{\tau_n}^{*'},\tau_n > 2b_n) \leqslant$$
$$P(T_{\tau_n}^* \neq T_{\tau_n}^{*'},\tau_n \leqslant 2b_n) + P(\tau_n > 2b_n) = o(1)。$$

因此
$$T_{\tau_n}^* - T_{\tau_n}^{*'} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty。\tag{7}$$

记
$$A_k = \{|T_k^{*'} - ET_k^{*'}| > n^2\varepsilon\}, B_n = \bigcup_{k=1}^{2b_n} A_k。$$

由 Markov 不等式、**引理 2**、式(1) 可得

$$P(B_n) = P(\max_{1\leqslant k\leqslant 2b_n} |T_k^{*'} - ET_k^{*'}| > n^2\varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^4\varepsilon^2} E(\max_{1\leqslant k\leqslant 2b_n} |T_k^{*'} - ET_k^{*'}|)^2 \leqslant$$

$$\frac{c}{n^4\varepsilon^2}\log^2 n \sum_{k=1}^{2b_n} E[k(Y_k - EY_k)]^2 = \frac{c}{n^4\varepsilon^2}\log^2 n \sum_{k=1}^{2b_n} k^2 E(Y_1 - EY_1)^2 \leqslant cn^{-1}\log^2 nEY_1^2 \leqslant$$

$$cn^{-1}\log^2 nEX_1^2 I\{|X_1| \leqslant n\} + cn\log^2 nP(|X_1| > n) := I_1 + I_2。$$

对于 I_2,由式(2) 可知:$I_2 \to 0, n \to \infty$。

对于 $\forall \beta > 0$,由式(2) 可知:存在 $N_0 > 0$,当 $k < N_0$ 时,有

$$(k+1)^{1+\delta} P(|X_1| > k) < \beta。$$

$$I_1 = cn^{-1}\log^2 nEX_1^2 I\{|X_1| \leqslant n\} = cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=1}^{n} E|X_1|^2 I\{k-1 \leqslant |X_1| \leqslant k\} \leqslant$$

$$cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=1}^{n} k^2 [P(|X_1| > k-1) - P(|X_1| > k)] =$$

$$cn^{-1}\log^2 n \Big[\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 P(|X_1| > k) - \sum_{k=1}^{n} k^2 P(|X_1| > k)\Big] \leqslant$$

$$cn^{-1}\log^2 n \Big[\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2) P(|X_1| > k)\Big] \leqslant cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=0}^{n} (k+1) P(|X_1| > k) =$$

$$cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=0}^{N_0} (k+1) P(|X_1| > k) + cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=N_0+1}^{n} (k+1) P(|X_1| > k) \leqslant$$

$$cN_0^2 n^{-1}\log^2 n + cn^{-1}\log^2 n \sum_{k=N_0+1}^{n} (k+1)^{-\delta}\beta \leqslant cn^{-1}\log^2 n + cn^{-\delta}\log^2 n \to 0, n \to \infty。$$

于是
$$P(A_{\tau_n}) \leqslant P(A_{\tau_n},\tau_n \leqslant 2b_n) + P(\tau_n > 2b_n) \leqslant P(B_n) + P(\tau_n > 2b_n) = o(1)。$$

再结合 A_{τ_n} 的定义知:
$$\frac{T_{\tau_n}^{*'} - ET_{\tau_n}^{*'}}{n^2} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty。\tag{8}$$

由式(7)、式(8) 可得

$$\frac{T_{\tau_n}^{*'} - ET_{\tau_n}^{*'}}{\tau_n^2} = \frac{n^2}{\tau_n^2} \cdot \frac{(T_{\tau_n}^* - T_{\tau_n}^{*'}) + (T_{\tau_n}^{*'} - ET_{\tau_n}^{*'})}{n^2} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty。$$

即
$$\frac{T_{\tau_n}^* - \sum_{k=1}^{\tau_n} kEY_k}{\tau_n^2} \xrightarrow{P} 0, n \to \infty。$$

所以
$$\frac{T_{\tau_n}^*}{\tau_n^2} - \frac{1}{2}EY_1 \xrightarrow{P} 0, n \to \infty。$$

式(3)得证。

下面再证式(5),注意到 $T_{\tau_n} + T_{\tau_n}^* = (\tau_n + 1)S_{\tau_n}$,可得

$$\frac{T_{\tau_n}}{\tau_n^2} + \frac{T_{\tau_n}^*}{\tau_n^2} = \frac{\tau_n + 1}{\tau_n} \cdot \frac{S_{\tau_n}}{\tau_n}\tag{9}$$

由式(3)、式(9)可知,要证明式(5)成立,只需要说明:

$$\frac{S_{\tau_n}}{\tau_n}-EY_1\xrightarrow{P}0,n\to\infty。\tag{10}$$

又因为

$$\frac{S_{\tau_n}}{\tau_n}=\frac{b_n}{\tau_n}\cdot\frac{S_{\tau_n}-S_{b_n}}{b_n}+\frac{S_{b_n}}{b_n},$$

由式(1)可知:

$$\frac{b_n}{\tau_n}\xrightarrow{P}1,n\to\infty;\frac{\tau_n-b_n}{b_n}\xrightarrow{P}0,n\to\infty。\tag{11}$$

由**引理3**可知:

$$\frac{S_{b_n}}{b_n}-EY_1\xrightarrow{P}0,n\to\infty。$$

故要证明式(10)成立,只需要证明

$$\frac{S_{\tau_n}-S_{b_n}}{b_n}\xrightarrow{P}0,n\to\infty。\tag{12}$$

由 Markov 不等式、**引理2**、式(4)、式(11)可得

$$\begin{aligned}P(|S_{\tau_n}-S_{b_n}|>\varepsilon b_n)\leqslant{}&P(|S_{\tau_n}-S_{b_n}|>\varepsilon b_n,|\tau_n-b_n|\leqslant\varepsilon b_n)+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\leqslant\\&P(\max_{|l-b_n|\leqslant[\varepsilon b_n]}|S_l-S_{b_n}|>\varepsilon b_n)+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\leqslant\\&\frac{1}{\varepsilon^2b_n^2}E(\max_{|l-b_n|\leqslant[\varepsilon b_n]}|S_l-S_{b_n}|)^2+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\leqslant\\&\frac{1}{\varepsilon^2b_n^2}E(\max_{b_n<l\leqslant b_n+[b_n\varepsilon]}|S_l-S_{b_n}|)^2+\frac{1}{\varepsilon^2b_n^2}E(\max_{b_n-[b_n\varepsilon]<l\leqslant b_n}|S_l-S_{b_n}|)^2+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\leqslant\\&\frac{c}{\varepsilon^2b_n^2}b_n\varepsilon\log^2nEX_1^2+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\leqslant\\&\frac{c}{\varepsilon b_n}\log^2nEX_1^2+P(|\tau_n-b_n|>\varepsilon b_n)\xrightarrow{P}0,n\to\infty。\end{aligned}$$

式(12)得证,故式(5)成立。**定理1**证毕。

3 结 语

在**定理1**中,式(3)成立的条件为$\lim\limits_{n\to\infty}n^{1+\delta}P(|X_1|>n)=0$,$\forall\delta>0$,这与文献[7]中定理1的条件$\lim\limits_{n\to\infty}nP(|X_1|>n)=0$已极为接近,但本研究把结论从I.I.D.的情形推广到了两两NQD序列这种相依情形的随机变量序列;文中式(5)成立的条件为$\{X_n,n\geqslant1\}$的二阶矩存在,此条件要远强于文献[7]中定理1的条件$\lim\limits_{n\to\infty}nP(|X_1|>n)=0$,应该有较大改进的余地。

参考文献:

[1] Rensick S L. Limit laws for record values[J]. Stochastic Processes and Their Applications,1973,1(1):67-82.

[2] Arnold B C, Villasenor J A. The asymptotic distributions of sums of records[J]. Kluwer Academic Publishers,1999,1(3):351-363.

[3] 江涛,林日其. I. I. D. 随机变量部分和之和的极限定理[J]. 淮南工业学院学报,2002,22(2):73-75,78.

[4] 查婷婷. 同分布PA序列部分和之和的弱大数定律[J]. 安徽建筑工业学院学报:自然科学版,2009,17(4):94-96.

[5] 俞周晓,王文胜. PA序列部分和之和的弱大数定律[J]. 杭州师范大学学报:自然科学版,2012,11(2):181-184.

[6] 沈建伟. 两两PQD序列部分和之和的弱大数律[J]. 浙江科技学院学报,2013,25(6):409-413.

[7] 江涛,苏淳,唐启鹤. I. I. D. 随机变量部分和之随机和的极限定理[J]. 中国科学技术大学学报,2001,31(4):394-399.

[8] Lehmann E L. Some concepts of dependence[J]. The Annals of Mathematical Statistics,1966,37(5):1137-1153.

[9] 吴群英. 两两NQD列的收敛性质[J]. 数学学报,2002,45(3):617-624.

[10] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京:科学出版社,2006.