浙江科技学院学报,第 27 卷第 6 期,2015 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 27 No. 6, Dec. 2015

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2015.06.001

Casson 不变量公式的一个应用

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:利用 J. Hoste 关于 Casson 不变量的一个公式,给出了三维同调球面 M 的 Casson 不变量和纽结 K(在 M 中)的 Conway 多项式的第二个系数与沿着 TK(比 K 的 untwisted double 纽结 DK 有更多的扭转)分歧的 M 的 p 层循环覆盖空间之间的关系的一个公式,它推广了 J. Hoste 的公式。

关键词:Casson 不变量;分歧覆盖空间;纽结;同调三维球面

中图分类号:O189.24　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2015)06-0455-04

An application of Casson's invariant

TAO Zhixiong
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Using the results for Casson's invariant obtained by J. Hoste, this paper proves a formula for Casson's invariant, in terms of Casson's invariant of homology 3-sphere M, the second coefficient of the Conway polynomial of knot K in M, Casson's invariant of the p-fold cyclic branched cover of M branched along TK (which has more twists than the untwisted double knot of K), which generalizes J. Hoste's result.

Key words: Casson's invariant; branched covering space; satellite knot; homology 3-sphere

20 世纪 80 年代,A. Casson 发现了一个有关同调三维球面的整数不变量 $\lambda(\cdot)$,它在 mod 2 下同余于 Rochlin 不变量 $\mu(\cdot)$[1],所以有很重要的意义。后来由其他数学家发展了这个不变量,名称也发生了一些变化。这里仅考虑整数情形,推广了 Hoste 的结论。

为了引进 Casson 不变量及相关的结论,需要给出一些记号[1-4]。假设 $L=\{K_1,\cdots,K_n\}$ 是三维同调球面 M 中给了有理数标架(rational framing) 分别为 $p_1/q_1,\cdots,p_n/q_n$ 的标架化链环(framed link),$\chi(K_1,\cdots,K_n;p_1/q_1,\cdots,p_n/q_n;M)$ 或更简单的 $\chi(L;M)$,该流形由 M 沿 L 根据所给的标架作 Dehn 换球术(surgery)

收稿日期:2015-04-26
基金项目:浙江省自然科学基金项目(LY12A01025)
作者简介:陶志雄(1961—　),男,浙江省绍兴人,副教授,博士,主要从事拓扑学研究。

得到，在 M 中的 Conway 多项式记为 $\nabla_{L;M}(z)$，则 $\nabla_{L;M}(z)=z^{n-1}(a_0+a_1z^2+\cdots+a_lz^{2l})$，$a_i\in\mathbb{Z}$，记 $\varphi_i(L;M)=a_i$[1]，$i=1,2,\cdots,l$，$lk(K,J;M)$ 为 K 与 J 在 M 中的链环数(linking number)。当 $M=S^3$ 时就省去 M，而且，在这种情形下，若 K 与 J 都是纽结时，$a_0=lk(K,J)$[5]。现要证明下列定理：

定理 A 设 K 是同调三维球面 M 中纽结，TK 为 K 的卫星纽结[2-3]，它的 pattern($\widetilde{V},\widetilde{K}$) 如图 1，为带有 m 个扭转(full-twist)的纽结，$\widetilde{M}$ 是沿着 TK 分歧的 M 的 p 层循环分歧覆盖空间(p-fold branched cover)[2-3]。则 $\lambda(\widetilde{M})=p\lambda(M)+2mp\varphi_1(K;M)$。

这里卫星纽结 TK 和它的 pattern $\widetilde{K}$[3] 之间的同胚是 faithful[2]。换言之，$\widetilde{K}$ 如图 1 落在实心环 $\widetilde{V}$ 里面，一个从 $\widetilde{V}$ 到 K 的管状邻域 V 的所谓 faithful 同胚 h，必须满足 h(longitude) = 1(longitude) + 0(meridian)；直观地说，即将 $\widetilde{V}$ 沿 meridian 切开，改变成 K 的形状并作适当的扭转，然后两端再黏合，此时原 $\widetilde{V}$ 内的 $\widetilde{K}$ 就成了 TK。

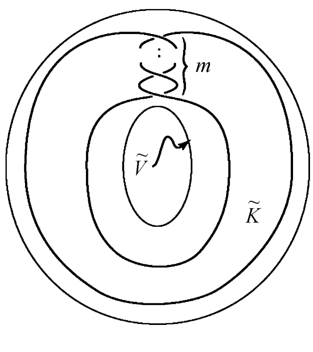


图 1 Pattern($\widetilde{V},\widetilde{R}$)

Fig. 1 Pattern($\widetilde{V},\widetilde{R}$)

显然，DK(untwisted double knot of K)[1] 是 TK 的特款。

1 预 备

Casson 不变量由下列定理给出：

定理 1[1] 存在唯一的三维同调球面 M 的整数不变量 λ，使得

1) $\lambda(S^3)=0$；

2) 若 K 是 M 中纽结，则 $\lambda(\chi(K;1/(q+1);M))-\lambda(\chi(K;1/q;M))=\varphi_1(K;M)$。

J. Hoste 根据**定理 1** 中 1) 和 2) 性质得出以下定理：

定理 2[1] 设 $L=\{K_1,\cdots,K_n\}$ 是三维同调球面 M 中的定向标架链环，标架分别为 $1/q_1,\cdots,1/q_n$。进一步，对所有 $i\neq j$，$lk(K_i,K_j;M)=0$。则

$$\lambda(\chi(L;M))=\lambda(M)+\sum_{L'\subset L}(\prod_{i\in L'}q_i)\varphi_1(L';M),$$

上面表达式中第二项，J. Hoste 证明了只要考虑所有三个及三个以下分支的 L' 即可，四个及四个以上分支的 L' 必有 $\varphi_1=0$。

若 L 与 L' 是 S^3 两个有理标架化链环，使得 $\chi(L)=\chi(L')$，则 L 与 L' 可以通过有限个同胚、扭转和平凡插入或消去即有限次 Kirby-Rolfsen calculus 下相互转化[4]。J. Hoste 证明：在保持所有链环数(linking number)均为零的条件下，λ 在 Kirby-Rolfsen calculus 下不变。

定理 3[1] 假设 $\{K_1,K_2,\cdots,K_n\}$ 是三维同调球 M 中定向的链环，对所有的 $i\neq j$，$lk(K_i,K_j;M)=0$，则存在 Seifert 曲面 F_1 和 F_2 使得 $\partial F_1=K_1$，$\partial F_2=\{K_2,\cdots,K_n\}$，且 $F_1\cap F_2$ 或为空集或由单个的 ribbon 交组成，进一步，在后一种情形有 $F_1\cap F_2\subset \mathrm{int}F_1$，$F_1\cap\partial F_2\subset K_2$，$F_1\cap F_2$ 不与 F_2 分离。

条件同**定理 3**，J. Hoste 在文献[1] 引理 1.4 的证明中证明了若 L' 是沿 F_1 割开 F_2 所得的 Seifert 曲面的边界 $-n$ 分支的链环，则 $\varphi_1(K_1,\cdots,K_n;M)=-\varphi_0(L';M)$。

2 定理的证明

根据**定理 2**，设 $K\subset M=\chi(L)=\chi(K_1,K_2,\cdots,K_r)$，对于每个 i，K_i 为带换球术系数(surgery coefficient) $1/q_i(q_i\in\mathbb{Z})$ 的平凡纽结，$i\neq j$ 时，$lk(K_i,K_j)=0$，并且 $K\subset S^3-L$，对于所有的 i，$lk(K,K_i)=0$。为了解开 K，使其变为平凡纽结，对每个要改变的 K 的交叉，引进换球术曲线 C_i(见图 2)，那么沿 C_i 做一次标架数为 $\varepsilon_i=\pm1(i=1,2,\cdots s)$ 的换球术之后可改变 K 为如图 3，其中表示 M 的换球术曲线 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 和 $C_1,C_2,\cdots,C_s$ 都落在实心环 T 内。这些 C_i 是平凡的且与所有 K_j 分裂，并满足 $lk(C_i,C_j)=0=$

$lk(K, C_i)$。现在，TK 在这些 surgery 下改变为如图 4(a)。分别作沿 P 标架数为 $1/\mathrm{m}$ 的换球术(这里可以认为 K 是分离的)，于是就有了 TK 的换球术描述(surgery description) 图 4(b) 。

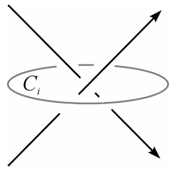


图 2　换球术曲线

Fig. 2　Surgery curve

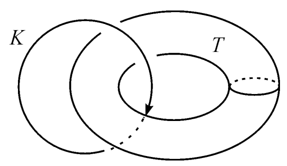
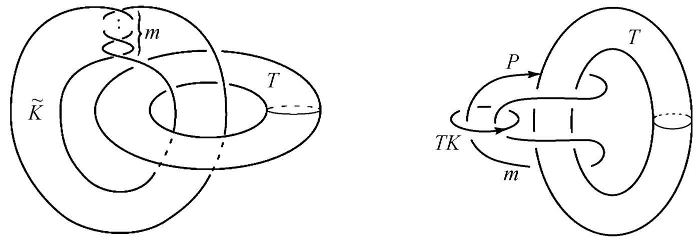


图 3　术后之 K 与 T

Fig. 3　K and T after surgery



(a)　　(b)

图 4　TK 与 TK 的换球术描述

Fig. 4　TK and its surgery description

现在可以得到 $\widetilde{M}$ 的换球术描述(图 5)，其中上下(upstair, downstair)C_i 和 K_i 是一样的。

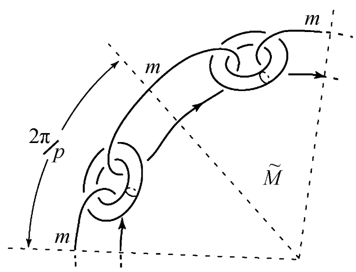


图 5　$\widetilde{M}$

Fig. 5　$\widetilde{M}$

设 $\widetilde{L}$ 为如图 5 所示之链环，它包括 p 个 T 内的所有分支及将这些 T 连起来的 p 个平凡纽结。根据**定理 2** 及其后的说明，为了计算 $\lambda(\widetilde{M})$，只要考虑 $\widetilde{L}$ 的有 1,2 和 3 个分支的子链环即可。

根据**定理 2**，就一个分支来说，由于所有分支是平凡纽结，故没有对 $\lambda(\widetilde{M})$ 提供非零值。两个分支的情形：T 外与 T 内的闭曲线有贡献值 $pm\varepsilon_i\varphi_1(K, C_i)$，$pm\varepsilon_i\varphi_1(-K, C_i)$ 和 $pmq_i\varphi_1(K, K_i)$，$pmq_i\varphi_1(-K, K_i)$，在不同 T 内的任何两个纽结形成的子链环为分裂，无贡献值。另外，还有贡献值 $pq_iq_j\varphi_1(K_i, K_j)$，$K_i$ 与 C_j，C_i 与 C_j 分裂，也无贡献值。三个分支的情形，因为每个 K_i 或 C_i 与 K 无链环数，所以 K 与 $-K$ 为边界的 Seifert 曲面和 K_i，C_i 分别为边界的两个 Seifert 曲面都不相交，于是(加一个管子将两个不交的曲面连起来就得到一个连通的 Seifert 曲面) 有 $\varphi_1(K, -K, C_i) = 0 = \varphi_1(K, -K, K_i)$。仅有贡献值是 $pm\varepsilon_iq_j\varphi_1(K, C_i, K_j)$，$pmq_iq_j\varphi_1(K, K_i, K_j)$，$pm\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(K, C_i, C_j)$，$pm\varepsilon_iq_j\varphi_1(-K, C_i, K_j)$，$pmq_iq_j\varphi_1(-K, K_i, K_j)$，$pm\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(-K, C_i, C_j)$，$pq_iq_jq_k\varphi_1(K_i, K_j, K_k)$，相邻的两个 T 内各任取一个分支与 K 组成的链环无贡献值。因为这三个分支子链环可以看作为两个链环的连通和(connected sum)，即可视为 K 和一个 T 内的某个分支与 $-K$ 和另一个 T 内的分支这两个链环作，且每个链环均有 $\varphi_0 = 0$，即 $a_0 = 0$，连通和的 Conway 多项式是因子(factor) 的 Conway 多项式之积[3]，于是根据定理 A 前的叙述，两链环的每个都有 $\nabla_L(z) = z(a_1z^2 + \cdots + a_lz^{2l})$ 的形式，故连通和的 *Conway* 多项式最低次是 6，即 $\varphi_1 = 0$。

由上面讨论知道：

$$\begin{aligned}\lambda(\widetilde{M}) = {} & p[m\{\sum_i(\varepsilon_i\varphi_1(K, C_i) + \varepsilon_i\varphi_1(-K, C_i)) + \sum_i(q_i\varphi_1(K, K_i) + q_i\varphi_1(-K, K_i))\} + \\ & \sum_{i<j}q_iq_j\varphi_1(K_i, K_j) + m\{\sum_{i,j}(\varepsilon_iq_j\varphi_1(K, C_i, K_j) + \varepsilon_iq_j\varphi_1(-K, C_i, K_j)) + \\ & \sum_{i<j}q_iq_j\varphi_1(K, K_i, K_j) + q_iq_j\varphi_1(-K, K_i, K_j)) + \sum_{i<j}\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(K, C_i, C_j) + \\ & \varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(-K, C_i, C_j))\} + \sum_{i<j<k}q_iq_jq_k\varphi_1(K_i, K_j, K_k)]。\end{aligned} \tag{1}$$

由**定理 1**，

$$\lambda(M)+\varphi_1(K,M)=\lambda(\chi(K,+1;M))=\lambda(\chi(K,K_1,\cdots,K_r,C_1,\cdots,C_s))。\tag{2}$$

又根据**定理 2**，等式右边为

$$\sum_i \varepsilon_i\varphi_1(K,C_i)+\sum_i q_i\varphi_1(K,K_i)+\sum_{i<j} q_iq_j\varphi_1(K_i,K_j)+\sum_{i,j}\varepsilon_iq_j\varphi_1(K,C_i,K_j)+$$
$$\sum_{i<j} q_iq_j\varphi_1(K,K_i,K_j)+\sum_{i<j}\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(K,C_i,C_j)+\sum_{i<j<k}q_iq_jq_k\varphi_1(K_i,K_j,K_k)。$$

同理

$$\lambda(M)=\sum_{i<j}q_iq_j\varphi_1(K_i,K_j)+\sum_{i<j<k}q_iq_jq_k\varphi_1(K_i,K_j,K_k)。$$

这样从式(2)得

$$\begin{aligned}\varphi_1(K;M)=&\sum_i\varepsilon_i\varphi_1(K,C_i)+\sum_i q_i\varphi_1(K,K_i)+\sum_{i,j}\varepsilon_iq_j\varphi_1(K,C_i,K_j)+\\&\sum_{i<j}q_iq_j\varphi_1(K,K_i,K_j)+\sum_{i<j}\varepsilon_i\varepsilon_j\varphi_1(K,C_i,C_j)。\end{aligned}\tag{3}$$

两式中右边的 K 改为 $-K$ 时等式依然成立，比较式(1)，式(2) 和式(3) 得

$$\lambda(\widetilde{M})=p\lambda(M)+2mp\varphi_1(K,M)。$$

至此，定理的证明就完成了。

参考文献：

[1] Hoste J. A formula for Casson's invariant [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 297(2): 547-562.

[2] Rolfsen D. Knots and links[M]. Berkeley CA: Publish or Perish, 1976.

[3] Burde G, Zieschang H. Knots[M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1985.

[4] Rolfsen D. Rational surgery calculus: Extension of Kirby's theorem [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1984, 110(2): 377-386.

[5] Hoste J. The first coefficient of the Conway polynomial[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1985, 95(2): 299-302.