浙江科技学院学报，第 28 卷第 1 期，2016 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 28 No. 1，Feb. 2016

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2016.01.002

LPQD 序列生成的移动平均过程的矩完全收敛性

沈建伟

（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：令$\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$是一个双向无穷的 LPQD 随机变量序列，$\{a_i,-\infty<i<\infty\}$是一个绝对可加的实数列且 $X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_iY_{i+k},k\geqslant 1$。在适当的条件下通过随机变量的截尾和 LPQD 序列的矩不等式得到了由 LPQD 序列生成的移动平均过程的矩完全收敛性。

关键词：移动平均过程；矩完全收敛性；LPQD 序列

中图分类号：O211.4　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2016)01-0007-05

Complete moment convergence for moving average process generated by LPQD sequences

SHEN Jianwei

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Let $\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$ be a doubly infinite sequence of LPQD random variables and $\{a_i,-\infty<i<\infty\}$ be an absolutely summable sequence of real numbers and $X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_iY_{i+k},k\geqslant 1$. The complete moment convegence for moving average process generated by LPQD sequences under some suitable conditions is obtained by means of truncation and moment inequality.

Keywords: moving average process; complete moment convergence; LPQD sequences

1　引　理

定义 1[1]1137,[2]130　称随机变量 X 和 Y 是 PQD (positively quadrant dependent)的，若对 $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 都有

$$P(X\leqslant x,Y\leqslant y)\geqslant P(X\leqslant x)P(Y\leqslant y),$$

则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是两两 PQD 的；若对 $\forall i\neq j$，X_i 与 X_j 是 PQD 的，则称随机变量列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是 LPQD 的；若对任意不交子集 $A,B\subset Z^+$ 及正实数 r_i，则有 $\sum_{i\in A}r_iX_i$ 和 $\sum_{j\in B}r_jX_j$ 是 PQD 的。

当前对于 LPQD 序列的研究已取得了不少成果。文献[2-3]分别获得了强平稳 LPQD 过程的中心

收稿日期：2015-11-01

作者简介：沈建伟(1972—　)，男，浙江省萧山人，讲师，硕士，主要从事概率极限理论研究。

极限定理和泛函中心极限定理，文献[4]得到了LPQD序列的不变原理，文献[5]建立了平稳LPQD序列生成线性过程的中心极限定理，文献[6]获得了平稳LPQD列生成线性过程部分和的精确渐近性，文献[7]建立了非平稳的LPQD序列和LNQD序列生成线性过程部分和的矩不等式。

本研究得到了不同分布的LPQD序列生成的线性过程的部分和的最大值的矩完全收敛结果。为行文方便，总是假定C代表正常数，并在不同的地方可以代表不同的值。以下是一些定义和相关的引理。

定义2[8] 如果对任意的$\lambda>0$满足$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{l(\lambda x)}{l(x)}=1$，则称定义在$[0,\infty)$上的实值正函数$l(x)$是在无穷远处的慢变函数。

定义3[9] 设C是一个正常数，$\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$是任意随机序列。如果存在某随机变量Y，使对任意$x\geqslant 0$及$n\in\mathbb{Z}$，有$P(|Y_n|\geqslant x)\leqslant CP(|Y|\geqslant x)$，则称$\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$是被随机变量$Y$控制的随机变量列。

引理1[4]489 令$\{Y_i,i\geqslant 1\}$是一个LPQD随机变量列，$EY_i=0$，存在$\delta>0$，$E|Y_i|^{2+\delta}<\infty$。假定对$0<\delta'<\delta$，$u(n)=O(n^{-\delta'(2+\delta)/2(\delta-\delta')})$；那么存在常数$B>0$使得对$\forall k\in\mathbb{N}$，有

$$\sup_{n\geqslant 1}E\left|\sum_{j=k+1}^{k+n}Y_j\right|^{2+\delta'}\leqslant Bn^{1+\delta'/2}。$$

其中，$u(n)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{j:|j-k|\geqslant n}|\mathrm{Cov}(Y_j,Y_k)|,n\geqslant 1$。

引理2[1]1138 设随机变量X和Y是PQD的，则

1)$EXY\geqslant EXEY$；

2)若f、g同为非降(或非增)函数，则$f(X)$与$g(Y)$仍为PQD的。

引理3[10] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是任意随机序列。如果存在某随机变量X，使对任意$x>0$及$n\geqslant 1$，有$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant CP(|X|\geqslant x)$，则对$\forall\beta>0$，$\forall t>0$有

$$E|X_n|^{\beta}I(|X_n|\leqslant t)\leqslant C(E|X|^{\beta}I(|X|\leqslant t)+t^{\beta}P(|X|>t)),$$
$$E|X_n|^{\beta}I(|X_n|>t)\leqslant CE|X|^{\beta}I(|X|>t)。$$

引理4[11] 设$l(x)$是在无穷远处的慢变函数，则

1)对任意的$s>-1$和正整数m，有$\sum\limits_{n=1}^{m}n^{s}l(n)\leqslant Cm^{s+1}l(m)$；

2)对任意的$s<-1$和正整数m，有$\sum\limits_{n=m}^{\infty}n^{s}l(n)\leqslant Cm^{s+1}l(m)$。

2 主要结果

定理1 假设$l(x)>0(x>0)$是在无穷远处的慢变函数，$\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$是被随机变量Y控制的LPQD序列，且$EY_i=0$，存在$\delta>0$，使得$E|Y_i|^{2+\delta}<\infty$。$\{a_i,-\infty<i<\infty\}$是一个绝对可加的实数列，记$X_k=\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_iY_{i+k},k\geqslant 1$；$u(n)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\sum\limits_{j:|j-k|\geqslant n}|\mathrm{Cov}(Y_j,Y_k)|,n\geqslant 1$。假定对$0<\delta'<\delta$，$u(n)=O(n^{-\delta'(2+\delta)/2(\delta-\delta')})$，且$1\leqslant p<2$，$\alpha>\dfrac{1}{2}$，$\alpha p\geqslant 1$。若$E|Y|^{p+\delta}h(|Y|^{1/\alpha})<\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)E\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}X_j\right|-\varepsilon n^{\alpha}\}^{+}<\infty,\text{对}\forall\varepsilon>0。\tag{1}$$

注：1)令$a_0=1$；$a_i=0,i\neq 0$，则$X_k=Y_k$，且$\{a_i,-\infty<i<\infty\}$显然是一个绝对可加的实数列。因此，在**定理1**的条件下，当$\{X_k,k\geqslant 1\}$是LPQD序列时式(1)仍成立。

2)若$\{Y_i,-\infty<i<\infty\}$是均值为零的同分布LPQD序列，存在$\delta>0$，使得$E|Y_1|^{2+\delta}<\infty$，且$E|Y_1|^{p+\delta}h(|Y_1|^{1/\alpha})<\infty$，则**定理1**的结论仍成立。

3)因LPQD序列蕴含了PA序列，故**定理1**的结果也适合于PA序列。

4)由于矩完全收敛性蕴含了完全收敛性，故在**定理1**的条件下，式(1)蕴含了

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2}l(n)P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}X_j\right|\geqslant\varepsilon n^{\alpha}\}<\infty,\text{对}\forall\varepsilon>0。$$

证明　由**引理 1** 可得,对$\forall\, 2<q<2+\delta$,存在一个不依赖于 n 的正常数 C,使得

$$\sup_m E\left|\sum_{j=1}^{n} Y_{m+j}\right|^q \leqslant Cn^{q/2},m\in\mathbb{N}。\tag{2}$$

由 Stout[12] 的定理 3.7.5 及式(2)可得

$$\sup_m E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} Y_{m+j}\right|^q=\sup_m E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} Y_{m+j}\right|\right)^q \leqslant Cn^{q/2},m\in\mathbb{N}。$$

于是

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} Y_{m+j}\right|^q \leqslant Cn^{q/2},m\in\mathbb{N}。\tag{3}$$

记　$T_{xj}=-xI(Y_j<-x)+Y_jI(|Y_j|\leqslant x)+xI(Y_j>x),Y_{xj}=T_{xj}-ET_{xj}$。

由**引理 2** 可知,$\{Y_{xj},-\infty<j<\infty\}$ 仍是均值为零的 LPQD 序列。

显然:$\sum_{k=1}^{n} X_k=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\sum_{j=i+1}^{i+n} Y_j$,且$\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|<\infty$。

当 $x>n^\alpha$ 时,

1)若 $\alpha>1$,由**引理 3** 可得

$$\begin{aligned}
x^{-1}\left|E\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\sum_{j=i+1}^{i+n} T_{xj}\right| &\leqslant x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\sum_{j=i+1}^{i+n}|ET_{xj}|\leqslant\\
&x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\sum_{j=i+1}^{i+n} E[|Y_j|I\{|Y_j|\leqslant x\}+xI\{|Y_j|>x\}]\leqslant\\
&Cx^{-1}n[E|Y|I|Y|\leqslant x\}+xP(|Y|>x)]\leqslant\\
&Cn^{1-\alpha}\to 0,n\to\infty。
\end{aligned}$$

2)若$\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$,注意到 $EY_j=0,\alpha p\geqslant 1$,由**引理 3** 可得

$$\begin{aligned}
x^{-1}\left|E\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\sum_{j=i+1}^{i+n} T_{xj}\right| &\leqslant x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\sum_{j=i+1}^{i+n}|ET_{xj}|\leqslant\\
&x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\sum_{j=i+1}^{i+n}|E(T_{xj}-Y_j)|\leqslant\\
&x^{-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|\sum_{j=i+1}^{i+n} E|Y_j|I\{|Y_j|>x\}\leqslant\\
&Cx^{-1}nE|Y|I\{|Y|>x\}\leqslant\\
&Cx^{1/\alpha-1}E|Y|I\{|Y|>x\}\leqslant\\
&CE|Y|^{1/\alpha}I\{|Y|>x\}\leqslant\\
&CE|Y|^pI\{|Y|>x\}\to 0,n\to\infty。
\end{aligned}$$

因此,当 $x>n^\alpha$ 且充分大时,$x^{-1}\left|E\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i\sum_{j=i+1}^{i+n} T_{xj}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$。

从而

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)E\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right|-\varepsilon n^\alpha\right\}^+\leqslant\\
&\quad\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varepsilon n^\alpha}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right|\geqslant x\right\}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty} P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} X_j\right|\geqslant\varepsilon x\right\}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty} P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k} Y_jI\{|Y_j|>x\}\right|\geqslant\frac{\varepsilon x}{2}\right\}\mathrm{d}x+\\
&\quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty} P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}[Y_{xj}+ET_{xj}+xI(Y_j<-x)-xI(Y_j>x)]\right|\geqslant\frac{\varepsilon x}{2}\right\}\mathrm{d}x\leqslant\\
&\quad C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-\alpha} l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty} P\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k} Y_jI\{|Y_j|>x\}\right|\geqslant\frac{\varepsilon x}{2}\right\}\mathrm{d}x+
\end{aligned}$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}[Y_{xj}+xI(Y_j<-x)-xI(Y_j>x)]|\geqslant\frac{\varepsilon x}{4}\}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_jI\{|Y_j|>x\}|\geqslant\frac{\varepsilon x}{2}\}\mathrm{d}x+$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_{xj}|\geqslant\frac{\varepsilon x}{8}\}\mathrm{d}x+$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}[xI(Y_j<-x)-xI(Y_j>x)]|\geqslant\frac{\varepsilon x}{8}\}\mathrm{d}x=:I_1+I_2+I_3。$$

现证明 $I_1<\infty$。由 Markov 不等式和**引理 3** 知

$$I_1\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}x^{-1}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_jI\{|Y_j|>x\}|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}x^{-1}E|Y|I\{|Y|>x\}\mathrm{d}x=$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\sum_{m=n}^{\infty}\int_{m^\alpha}^{(m+1)^\alpha}x^{-1}E|Y|I\{|Y|>x\}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\sum_{m=n}^{\infty}m^{-1}E|Y|I\{|Y|>m^\alpha\}=$$

$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}E\{|Y|I\{|Y|>m^\alpha\}\sum_{n=1}^{m}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)。$$

1) 如果 $p>1$，则 $\alpha p-1-\alpha=\alpha(p-1)-1>-1$，由**引理 4** 知

$$I_1\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha p-1-\alpha}l(m)E|Y|I\{|Y|>m^\alpha\}=$$

$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha p-1-\alpha}l(m)\sum_{k=m}^{\infty}E|Y|I\{k^\alpha<|Y|\leqslant(k+1)^\alpha\}=$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}E|Y|I\{k^\alpha<|Y|\leqslant(k+1)^\alpha\}\sum_{m=1}^{k}m^{\alpha p-1-\alpha}l(m)\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha p-\alpha}l(k)E|Y|I\{k^\alpha<|Y|\leqslant(k+1)^\alpha\}\leqslant$$

$$CE|Y|^pl(|Y|^{1/\alpha})<\infty。$$

2) 如果 $p=1$，对于 $\forall\delta>0$，由**引理 4** 知

$$I_1\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}E|Y|I\{|Y|>m^\alpha\}\sum_{n=1}^{m}n^{-1}l(n)\leqslant$$

$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}E|Y|I\{|Y|>m^\alpha\}\sum_{n=1}^{m}n^{-1+\alpha\delta}l(n)\leqslant$$

$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha\delta-1}l(m)E|Y|I\{|Y|\geqslant m^\alpha\}\leqslant$$

$$CE|Y|^{1+\delta}l(|Y|^{1/\alpha})<\infty。$$

由上述讨论可知 $I_1<\infty$。

再证明 $I_2<\infty$。由 Markov 不等式、Hölder 不等式及式(3) 知

$$I_2=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_{xj}|\geqslant\frac{\varepsilon x}{8}\}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}x^{-r}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_{xj}|^r\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}x^{-r}E[\sum_{i=-\infty}^{\infty}(|a_i|^{1-1/r})(|a_i|^{1/r}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_{xj}|)]^r\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^\alpha}^{\infty}x^{-r}(\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|)^{r-1}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|a_i|E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=i+1}^{i+k}Y_{xj}|^r)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}x^{-r}n^{r/2}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha+r/2}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}x^{-r}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha(p-r)-2+r/2}l(n),$$

其中,取 $2<r<2+\delta'$,$0<\delta'<\min\{2-p,\delta\}$。

由于 $1\leqslant p<2$,$\alpha>\dfrac{1}{2}$,可得 $\alpha(p-r)<-\alpha\delta'$,$-2+\dfrac{r}{2}<-1+\dfrac{\delta'}{2}$,于是

$$I_2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-\delta'(\alpha-1/2)}l(n)<\infty。$$

最后证明 $I_3<\infty$。

$$I_3=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}[xI(Y_j<-x)-xI(Y_j>x)]|\geqslant\frac{\varepsilon x}{8}\}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}xI(-Y_j>x)|\geqslant\frac{\varepsilon x}{16}\}\mathrm{d}x+$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}P\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}xI(Y_j>x)|\geqslant\frac{\varepsilon x}{16}\}\mathrm{d}x=:I_{31}+I_{32}。$$

$$I_{31}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}x^{-1}E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i\sum_{j=i+1}^{i+k}xI(-Y_j>x)|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}|\alpha_i|\sum_{j=i+1}^{i+n}P(-Y_j>x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\int_{n^{\alpha}}^{\infty}P(|Y|>x)\mathrm{d}x=$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\sum_{m=n}^{\infty}\int_{m^{\alpha}}^{(m+1)^{\alpha}}P(|Y|>x)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)\sum_{m=n}^{\infty}m^{\alpha-1}P(|Y|>m^{\alpha})=$$
$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha-1}P(|Y|>m^{\alpha})\sum_{n=1}^{m}n^{\alpha p-1-\alpha}l(n)。$$

1) 如果 $p>1$,则 $\alpha p-1-\alpha=\alpha(p-1)-1>-1$,由**引理 4** 知

$$I_{31}\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha p-1}l(m)P(|Y|>m^{\alpha})=$$
$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha p-1}l(m)E|Y|^{p+\delta'}|Y|^{-p-\delta'}I(|Y|>m^{\alpha})\leqslant$$
$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1-\alpha\delta'}l(m)<\infty。$$

2) 如果 $p=1$,对于 $\forall\delta>0$,由**引理 4** 知

$$I_{31}\leqslant C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha-1}P(|Y|>m^{\alpha})\sum_{n=1}^{m}n^{-1}l(n)\leqslant$$
$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha-1}E|Y||Y|^{-1}I(|Y|>m^{\alpha})\sum_{n=1}^{m}n^{-1+\alpha\delta}l(n)\leqslant$$
$$C\sum_{m=1}^{\infty}m^{\alpha\delta-1}l(m)E|Y|I(|Y|>m^{\alpha})\leqslant$$
$$CE|Y|^{1+\delta}l(|Y|^{1/\alpha})<\infty。$$

对于 I_{32},证明类似于 I_{31},不赘述,于是 $I_{32}<\infty$。

综上所述,$I_1<\infty$,$I_2<\infty$,$I_3<\infty$。

证毕。

(下转第 31 页)