浙江科技学院学报,第 28 卷第 1 期,2016 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 28 No. 1, Feb. 2016

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2016.01.003

机器带故障的三台机排序问题的两个近似算法

叶赛英,徐弼军
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:机器带故障的 m 台机的目标函数为最小化误工工件数的排序问题,在 $m\geqslant 2$ 时是 NP(nondeterministic polynomial)困难的问题,对 $m=3$,当工件转移时间 $t=0$ 和 $t\neq 0$ 两种情况,提出了 $P3\left|D=\infty, t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$ 和 $P3\left|D=\infty, t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$ 的近似算法,以及对应的渐进性能比,且证明了其界是紧的。

关键词:排序;性能比;最小化误工工件数;机器带故障中断;近似算法
中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2016)01-0012-07

Two approximation algorithms for three parallel machines scheduling with machine disruptions

YE Saiying, XU Bijun
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: We discuss the problem of m parallel machines scheduling with disruptions with the objective of minimizing the sum of unit penalties. If $m\geqslant 2$, the problem is NP-hard. When $m=3$ and transfer time is $t=0$ and $t\neq 0$, two approximation algorithms are proposed for the problems of $P3\left|D=\infty, t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$ and $P3\left|D=\infty, t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$ respectively. And the paper proves that the upper bound is tight respectively.

Keywords: scheduling; worst-case ratio; minimizing the sum of unit penalties; machine disruptions; approximation algorithm

在经典的平行机排序问题中,通常要求多台机器性能完全相同,给定一个任意的等待加工的工件集,在满足特定的约束条件下,求解一个排序,使给定的某个目标函数最优。单台机下的误工工件数最小化的问题是有最优算法的,按照 Moore 算法可以得到问题的最优解[1-2]。如果考虑两台平行机,由于意外或不可抗力导致其中一台机器发生故障中断,那么,在该机器上加工的工件只能转移到另外一台正常工

收稿日期:2015-11-01
基金项目:浙江省《基础数学》重点学科建设学术研究子项目(20131029)
作者简介:叶赛英(1980—　),女,浙江省松阳人,讲师,硕士,主要从事排序问题研究。

作的机器上去加工[3]，在目标函数为最小化误工工件数要求下，该问题是 NP(nondeterministic polynomial)困难的[4]，文献[5-7]给出了不同情况下两台机带故障的近似算法。由于两台机问题是 NP 困难的，从而三台机问题也是 NP 困难的[8]，本研究讨论三台机带故障中断下，目标函数为误工工件数最小化的问题。

1　问题的提出

现有三台相同的机器，将三台机器上正在加工的工件集设为：

$$I=\{J_{11},J_{12},\cdots,J_{1n_1};J_{21},J_{22},\cdots,J_{2n_2};J_{31},J_{32},\cdots,J_{3n_3}\},$$

其中，J_{ij} 为中断前计划在机器 M_i 上加工的第 j 个工件，加工时间为 p_{ij}，$n_1+n_2+n_3=n$。设机器 M_i 在初始的 0 时刻发生故障中断，且中断的持续时间很长，在该机器上未完工的工件不可能等待机器恢复正常后再加工，不妨设中断时长 $D=\infty$，构造 0—1 变量

$$u'_{ij}=\begin{cases}1, & C'_{ij}>C_{ij}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}。$$

其中：C_{ij} 为工件 J_{ij} 原计划中的完工时间；C'_{ij} 为重新排序后 J_{ij} 的完工时间。那么，怎样将工件重新排序，才能使得误工工件总数 $\sum u'_{ij}$ 达到最小？为不失一般性，不妨设三台机器中 M_1 发生故障中断，中断时刻为 0 时刻，t_1 为 M_1 工件转移到 M_2 上所花时间，t_2 为 M_2 工件传输到 M_3 上所花的时间，M_2 工件和 M_3 工件相互转移时间为 0。用三参数法表示为 $P3\left|D=\infty,t_1,t_2\right|\sum u'_{ij}$，这是 NP 困难问题[3]。如果能找到该问题的多项式时间的近似算法，那将是一项很有价值的研究。为了研究问题的方便，现在将研究目标函数改为按期完工工件数 $n-\sum u'_{ij}$ 最大化问题。

2　问题 $P3\left|D=\infty,t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$ 的近似算法

定义 1　设在中断发生时机器上正在加工的工件为跨越工件。

当中断发生时 M_1 上未完成的工件集为 S_1，M_2 上的跨越工件为 J_{2r}，M_2 上未完成的工件集为 S_2，M_3 上的跨越工件为 J_{3s}，M_3 上未完成的工件集为 S_3。如图 1 所示，其中灰色为中断时三台机上未完成的工件。

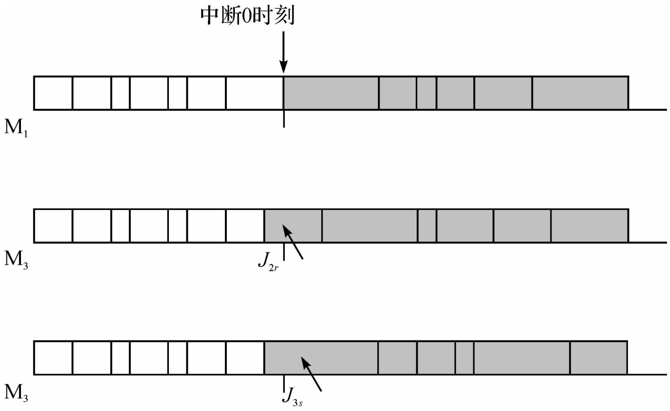

图 1　机器 M_1，M_2，M_3 上原排序

Fig. 1　Original scheduling of machine M_1，M_2，M_3

先考虑转移时间为 $t_1=t_2=0$ 的情况。

算法 1　$P3\left|D=\infty,t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$ 的算法。

1)将工件集 $I_1=S_1\cup S_2\cup S_3$ 按交工期限的单调非减顺序排好；将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 加工，记在 M_2 上按期完工工件集为 P_2；将 $I_1\backslash P_2$ 中工件按 Moore 算法依次分配给 M_3 加工，记 M_3 上按期完工工件集为 P_3；最后将 $I_1\backslash\{P_2\cup P_3\}$中的工件以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工(M_2 先加工 $S_2\backslash P_2$ 中工件，M_3 先加工 $S_3\backslash P_3$ 中工件)，对应序记为 σ_1。

2)将工件集 $I_2=S_1\cup(S_2\setminus\{J_{2r}\})\cup S_3$ 按交工期限的单调非减顺序排好;将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 在工件 J_{2r}后加工,记 M_2 上按期完工工件集为 D_2;将 $I_2\setminus D_2$ 中工件按 Moore 算法依次分配给 M_3 加工,记 M_3 上按期完工工件集为 D_3。最后将 $I_2\setminus(D_2\cup D_3)$中工件以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工(M_2 先加工 $S_2\setminus D_2$ 中工件,M_3 先加工 $S_3\setminus D_3$ 中工件),对应序记为 σ_2。

3)将工件集 $I_2=S_1\cup S_2\cup(S_3\setminus\{J_{2s}\})$按交工期限的单调非减顺序排好;将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 加工,记 M_2 上按期完工工件集为 E_2;将 $I_2\setminus E_2$ 中工件按 Moore 算法依次分配给 M_3 在工件 J_{3s}后加工,记 M_3上按期完工工件集为 E_3。最后将 $I_2\setminus(E_2\cup E_3)$中工件以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工(M_2 先加工 $S_2\setminus E_2$ 中工件,M_3先加工 $S_3\setminus E_3$ 中工件),对应序记为 σ_3。

4)将工件集 $I_2=S_1\cup(S_2\setminus\{J_{2r}\})\cup(S_3\setminus\{J_{3s}\})$按交工期限的单调非减顺序排好;将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 在工件 J_{2r}后加工,记 M_2 上按期完工工件集为 F_2;将 $I_2\setminus F_2$ 中工件按 Moore 算法依次分配给 M_3 在工件 J_{3s}后加工,记 M_3 上按期完工工件集为 F_3。将 $I_2\setminus(F_2\cup F_3)$中工件以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工(M_2 先加工 $S_2\setminus F_2$ 中工件,M_3 先加工 $S_3\setminus F_3$ 中工件),对应序记为 σ_4。

5)记1),2),3),4)下按期完工工件数分别为 $n-\sum u'_{ij}(\sigma_1)$,$n-\sum u'_{ij}(\sigma_2)$,$n-\sum u'_{ij}(\sigma_3)$,$n-\sum u'_{ij}(\sigma_4)$,比较四者大小,选择值大的排序。

定理 1 对问题 $P3\left|D=\infty,t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$,$\frac{3}{4}$ 是**算法 1** 的渐进性能比的一个下界。

证明 设在**算法 1** 中 $\sigma_i(1\leqslant i\leqslant 4)$下的 M_2 上按期完工工件集为$\{J_{p_1},\cdots,J_{p_k}\}$,而由**算法 1** 最终得到的 M_2 上按期完工工件集至多为 $A_1=\{J_{p_1},\cdots J_{p_{k+1}}\}$,在**算法 1** 中 $\sigma_i(1\leqslant i\leqslant 4)$下的 M_3 上按期完工工件集为 $J_{q_1},\cdots,J_{q_r}$,由**算法 1** 最终得到 M_3 上按期完工工件集至多为 $A_2=\{J_{q_1},\cdots J_{q_{r+1}}\}$。

设 σ^* 为任一最优排序,记 σ^* 下 M_i 加工按期完工工件集为 B_{i-1},令 $Q_{i-1}=B_{i-1}\cap A_1$,$i=2,3$,用 $|\cdot|$表示集合中工件数,由于 $Q_1,Q_2\subseteq A_1$,所以有$|Q_1\cup Q_2|\leqslant|A_1|=k+1$。

情况 a $|Q_1|\geqslant|Q_2|$。

在 $1\|\sum u_j$ 问题当中 Moore 算法是最优算法,机器 M_2 上加工的按期完工的工件数至多为 $k+1$,故$|B_1|\leqslant k+1$,且$|B_2|=|B_2\cap A_1|+|B_2\setminus A_1|\leqslant|Q_2|+|B_2\setminus A_1|$。同样,**算法 1** 在机器 M_3 上排序是工件集 $I\setminus A_1$ 在 M_3 上的最优排序,故必有$|B_2\setminus A_1|\leqslant r+1$,$|B_2|\leqslant|Q_2|+r+1$;又因$|Q_1|+|Q_2|\leqslant|A_1|=k+1$ 及$|Q_1|\geqslant|Q_2|$,故$|Q_2|\leqslant\frac{k+1}{2}$,

$$\mathrm{OPT}(I)=|B_1|+|B_2|\leqslant k+1+\frac{k+1}{2}+r+1=\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}。\tag{1}$$

情况 b $|Q_1|<|Q_2|$。

此时,由于$|Q_1|+|Q_2|\leqslant k+1$,故$|Q_1|<\frac{k+1}{2}$,又因$|B_2|\leqslant k+1$(自然满足,由于$|B_2|\leqslant|B_1|\leqslant k+1$),且**算法 1** 在 M_3 上排序是 $I\setminus A_1$ 在 M_3 上的最优序,故$|B_1\setminus S_1|\leqslant r+1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{OPT}(I)=|B_1|+|B_2|\leqslant|B_1\cap A_1|+|B_1\setminus A_1|+k+1\leqslant|Q_1|+r+1+k+1\leqslant\\ \frac{k+1}{2}+r+k+2=\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2},\end{aligned}\tag{2}$$

综上所述,总有

$$\mathrm{OPT}(I)\leqslant\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}。\tag{3}$$

又由

$$|B_1|=|B_1\cap A_1|+|B_1\setminus A_1|\leqslant|Q_1|+r+1,$$

$$|B_2|=\Big|B_2\cap A_1+|B_2\setminus A_1|\Big|\leqslant|Q_2|+r+1,$$

则

$$\mathrm{OPT}(I)\leqslant|Q_1|+|Q_2|+2r+2\leqslant k+2r+3。\tag{4}$$

综合式(3)、(4)得

$$\mathrm{OPT}(I)\leqslant\min\{\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2},k+2r+3\}。\tag{5}$$

情况 1　当$\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}\leqslant k+2r+3$时，即$\frac{r}{k}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$，

此时，
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{k+r+2}{\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}}=\frac{1+\frac{r}{k}+\frac{2}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}+\frac{5}{2k}},$$

因 $k\geqslant r$，故 $k^2\geqslant kr$，$\frac{k}{2k^2}\geqslant\frac{r}{2k^2}$。两边同时加上$\frac{5k+4r}{2k^2}$得到$\frac{3}{k}+\frac{2r}{k^2}\geqslant\frac{5}{2k}+\frac{5r}{2k}$。两边同时加上$\frac{r}{k}+\frac{r^2}{k^2}+\frac{3}{2}+\frac{3r}{2k}$，因式分解后得$(1+\frac{r}{k})(\frac{3}{2}+\frac{r}{k})+(\frac{3}{2}+\frac{r}{k})\frac{2}{k}\geqslant(1+\frac{r}{k})(\frac{3}{2}+\frac{r}{k})+(1+\frac{r}{k})\frac{5}{2k}$，整理得，$\frac{1+\frac{r}{k}+\frac{2}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}+\frac{5}{2k}}\geqslant\frac{1+\frac{r}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}}$，

故
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{1+\frac{r}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}},\tag{6}$$

式(6)成立。

由于 $f(x)=\frac{1+x}{\frac{3}{2}+x}$是 x 严格增函数，故当 $x\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$时，$f(x)\geqslant f(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})=\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2k}}{2-\frac{1}{2k}}$。

根据笔者的算法及 Moore 算法最优性易得：$k\geqslant r$ 及 $k\geqslant\frac{\mathrm{OPT}(I)}{2}$。

故当 $\mathrm{OPT}(I)\to+\infty$时，必有 $k\to+\infty$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N；当 $\mathrm{OPT}(I)\geqslant N$ 时，必有
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{3}{4}-\varepsilon。\tag{7}$$

情况 2　当$\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}\geqslant k+2r+3$时，即 $2(r+2)\leqslant k+3$，两边同除 $2k$ 后为$\frac{r+2}{k}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{2k}$，

此时，
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{k+r+2}{k+2r+3}=\frac{1+\frac{r}{k}+\frac{2}{k}}{1+\frac{2r}{k}+\frac{3}{k}}=\frac{1+\frac{r+2}{k}}{1+\frac{2(r+2)}{k}-\frac{1}{k}}>\frac{1+\frac{r+2}{k}}{1+\frac{2(r+2)}{k}},\tag{8}$$

由于 $g(x)=\frac{1+x}{1+2x}$是 x 的严格减函数，故当 $x\leqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{2k}$时，有

$$g(x)\geqslant g(\frac{1}{2}+\frac{3}{2k})=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2k}}{1+2(\frac{1}{2}+\frac{3}{2k})}=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2k}}{1+1+\frac{3}{k}}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2k}}{2+\frac{3}{k}}。$$

同理，当 $\mathrm{OPT}(I)\to+\infty$时，必有 $k\to+\infty$。故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $\mathrm{OPT}(I)\geqslant N$ 时，有$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{3}{4}-\varepsilon$ 成立。

上述证明说明，不论何种情况发生，总有
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{3}{4}-\varepsilon,\tag{9}$$

由算法渐进性能比的定义[9]及 ε 的任意性知 $R_{\sigma}^{\infty}\geqslant\frac{3}{4}$，定理证毕。

定理 2　对于问题 $P3\left|D=\infty,t_1=t_2=0\right|n-\sum u'_{ij}$，**定理 1** 中的界$\frac{3}{4}$是紧的，即 $R_A^{\infty}=\frac{3}{4}$。

证明 设 M_2,M_3 上无跨越工件,设中断发生时三台机未完成工件依原最优序排列为,$S_1=\{J_{11}\}$,$S_2=\{J_{21},J_{22}\}$,$S_3=\{J_{31},J_{32}\}$,$p_{31}=1$,$p_{11}=p_{21}=p_{22}=2$,$p_{32}=4$,由此可知,$C_{11}=C_{21}=2$,$C_{22}=4$,$C_{31}=1$,$C_{32}=5$。

按**算法 1**,将 J_{31},J_{22}安排在 M_2 上加工,J_{11}安排在 M_3 上加工,J_{21},J_{32}为误工工件,以任意序最后安排在 M_2 或 M_3 上加工。

而最优算法为 J_{21}、J_{22}在 M_2 上加工,J_{31}、J_{32}安排在 M_3 上加工,误工工件为 J_{11},以任意序最后安排在 M_2 或 M_3 上加工,$\mathrm{OPT}(I)=4$,而 $A(I)=3$。由**定理 1**,$\frac{3}{4}$为**算法 1** 的下界,且上述问题的性能比为$\frac{3}{4}$,从而该界是紧的,故 $R_\sigma^\infty=\frac{3}{4}$,证毕。

3 问题 $P3\left|D=\infty,t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$ 的近似算法

现研究机器的传输时间不为零的中断排序问题 $P3\left|D=\infty,t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$。若 $t_1=t_2\neq 0$,则可以归为 $P3\left|D=\infty,t=0\right|n-\sum u'_{ij}$ 的情况。

考虑 $t_1\neq t_2$ 的情况,为不失一般性,不妨设 $t_1<t_2$,规定算法总是给传输时间较少的机器先分配加工工件。

设机器 M_1 在 0 时刻发生中断,中断发生后,一方面,由于 M_1 上未完成的工件转移到当中其他一台机器,最快也要 t_1 时刻,从而机器 M_1 上按原序所安排的 t_1 时刻之前开工的工件没来得及转移就已经误工了,由此只需要考虑 M_1 上按原序所安排的 t_1 时刻之后加工的工件。另一方面,由于 $t_2>t_1$,机器 M_1 上原序所安排的 t_1 时刻之后且 t_2 时刻之前开工的工件来不及转移就已经误工了,把这些来不及开工的工件记为哑工件,并记这些工件组成的集合为 R。

记 M_1 上 t_1 时刻未完成的工件组成工件集为 S_1,在 t_1 时刻机器 M_2上未完成的工件集为 S_2,此时设 M_2上的跨越工件为 J_{2r},在 t_2 时刻机器 M_3上未完成的工件集为 S_3,此时设 M_3上的跨越工件为 J_{3s}。如图 2所示,其中灰色为中断时三台机上未完成的工件。

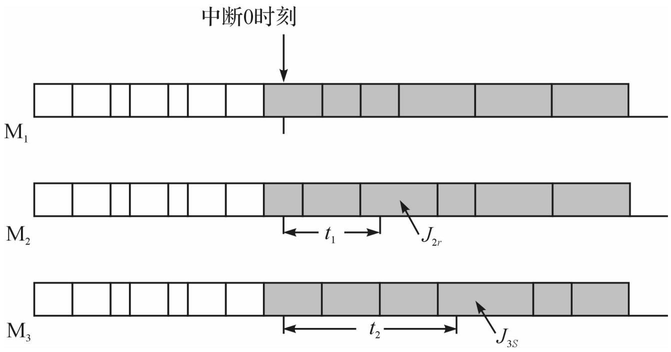

图 2 机器 M_1,M_2,M_3 上原排序

Fig. 2 Original scheduling of machine M_1,M_2,M_3

算法 2 $P3\left|D=\infty,t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$ 的近似算法。

1)将工件集 $I_1=S_1\cup S_2\cup S_3$ 按交工期限的单调非减顺序排好;在 t_1 时刻将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 加工(若首个工件为 J_{2r},则继续,不中断之),记在 M_2 上按期完工工件集为 P_2;将 $I_1\backslash(P_2\cup R)$中工件在 t_2 时刻按 Moore 算法依次分配给 M_3 加工(若首个工件为 J_{3s},则继续,不中断之),记在 M_3 上按期完工工件集为 P_3;最后以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工 $I_1\backslash\{P_2\cup P_3\}$及所有哑工件,对应序记为 σ_1。

2)将工件集 $I_1=S_1\cup(S_2\backslash\{J_{2r}\})\cup S_3$ 按交工期限的单调非减顺序排好;在 C_{2r}时刻将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2加工,记在 M_2 上按期完工工件集为 D_2;将 $I_1\backslash(D_2\cup R)$中工件在 t_2 时刻按 Moore 算法依次分配给 M_3加工(若首个工件为 J_{3s},则继续,不中断之),记在 M_3上按期完工工件集为 D_3;最后以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工 $I_1\backslash\{D_2\cup D_3\}$及所有哑工件,对应序记为 σ_2。

3）将工件集 $I_1=S_1\cup S_2\cup(S_3\backslash\{J_{3s}\})$ 按交工期限的单调非减顺序排好；在 t_1 时刻将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 加工（若首个工件为 J_{2r}，则继续，不中断之），记在 M_2 上按期完工工件集为 E_2；将 $I_1\backslash(E_2\cup R)$ 中工件在 C_{3s} 时刻按 Moore 算法依次分配给 M_3 加工（若首个工件为 J_{3s}，则继续，不中断之），记在 M_3 上按期完工工件集为 E_3；最后以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工 $I_1\backslash\{E_2\cup E_3\}$ 及所有哑工件，对应序记为 σ_3。

4）将工件集 $I_1=S_1\cup(S_2\backslash\{J_{2r}\})\cup(S_3\backslash\{J_{3s}\})$ 按交工期限的单调非减顺序排好；在 C_{2r} 时刻将排好序的工件按 Moore 算法依次分配给 M_2 加工，记在 M_2 上按期完工工件集为 F_2；将 $I_1\backslash(F_2\cup R)$ 中工件在 C_{3s} 时刻按 Moore 算法依次分配给 M_3 加工，记在 M_3 上按期完工工件集为 F_3；最后以任意顺序安排给 M_2 或 M_3 加工 $I_1\backslash\{F_2\cup F_3\}$ 及所有哑工件，对应序记为 σ_4。

5）记 1），2），3），4）下按期完工工件数分别为 $n-\sum u'_{ij}(\sigma_1)$，$n-\sum u'_{ij}(\sigma_2)$，$n-\sum u'_{ij}(\sigma_3)$，$n-\sum u'_{ij}(\sigma_4)$，比较四者大小，选择值大的排序。

定理 3　对问题 $P3\left|D=\infty,t_1\neq t_2\right|n-\sum u'_{ij}$，$\frac{2}{3}$ 是**算法 2** 的渐进性能比 R_A^∞[9] 的一个下界。

证明　分两种情况讨论。

情况 1　$|Q_1|\geqslant|Q_2|$。

由 Moore 算法最优性，有 $|B_1|\leqslant|A_1|=k+1$，又 $|B_2\backslash A_1|\leqslant r+1$，故 $|B_2|=|B_2\cap A_1|+|B_2\backslash A|\leqslant|Q_2|+r+1$，又由 $|Q_1|+|Q_2|\leqslant|A_1|=k+1$ 及 $|Q_1|\geqslant|Q_2|$，可知 $|Q_2|\leqslant\frac{k+1}{2}$，

故
$$\mathrm{OPT}(I)=|B_1|+|B_2|\leqslant k+1+\frac{k+1}{2}+r+1=\frac{3k}{2}+r+\frac{5}{2}。\tag{10}$$

情况 2　$|Q_1|<|Q_2|$。

在最优排序 σ^* 下，机器 M_2 在时刻 $t=t_1$ 起完成加工的按期工件集为 $\bar{B}_1\backslash A_1\subseteq I\backslash A_1$，且 A_2 是 $I\backslash A_1$ 在单台机上从 $t=t_2$ 开始加工的最优排序下按期完工的工件集，有 $|\bar{B}_1\backslash A_1|\leqslant|A_2|+1=r+1$（考虑到 $\bar{B}_1$ 中至多可以有一项工件在时刻 t_2 以前开始加工），故 $|\bar{B}_1|=|\bar{B}_1\cap A_1|+|\bar{B}_1\backslash A_1|\leqslant|Q_1|+r+1$，在 $|Q_1|<|Q_2|$ 时，又有 $|Q_1|<\frac{k+1}{2}$，从而有 $|\bar{B}_1|<\frac{k+1}{2}+r+1=\frac{k}{2}+r+\frac{3}{2}$。

由于 Moore 算法给出的是单台机加工的最优排序，系统除按期完成 $\bar{B}_1$ 中的工件的加工外，至多还能按期完成 $k+1$ 项工件的加工，故必有
$$\mathrm{OPT}(I)\leqslant k+1+|\bar{B}_1|<\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2}。\tag{11}$$

综上所述，不管发生何种情况，不等式
$$\mathrm{OPT}(I)<\frac{3}{2}k+r+\frac{5}{2},\tag{12}$$
总成立，而 $A(I)=(k+1)+(r+1)$，故此时必有
$$\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}>\frac{k+r+2}{\frac{3}{2}+r+\frac{5}{2}}=\frac{1+\frac{r}{k}+\frac{2}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}+\frac{5}{2k}}。$$

又因 $k\geqslant r$，$k\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{OPT}(I)$，故当 $\mathrm{OPT}(I)\to+\infty$ 时，必有 $k\to+\infty$，令 $f(x)=\frac{1+x}{\frac{3}{2}+x}$，由于 $f(x)$ 是 x 的严格增函数，故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant f(0)=\frac{2}{3}$，说明当 $\frac{r}{k}\leqslant 1$ 时，$\frac{1+\frac{r}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}}\geqslant\frac{2}{3}$。而 $\frac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)}\geqslant\frac{1+\frac{r}{k}}{\frac{3}{2}+\frac{r}{k}}\quad(k\geqslant r)$，

故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $\mathrm{OPT}(I) \geqslant N$ 时，总有 $\dfrac{A(I)}{\mathrm{OPT}(I)} \geqslant \dfrac{2}{3} - \varepsilon$。根据渐进性能比的定义[9]及 ε 的任意性，知 $R_A^\infty \geqslant \dfrac{2}{3}$，定理证毕。

定理 4 对于问题 $P3 \left| D = \infty, t_1 \neq t_2 \right| n - \sum u'_{ij}$，**定理 3** 中界 $\dfrac{2}{3}$ 是紧的，即 $R_A^\infty = \dfrac{2}{3}$。

证明 设 M_2、M_3 上无跨越工件，取 $t_1 = 0$，$t_2 = 1$，设 t_1 时刻机器 M_1、M_2 上最优序为 $S_1 = \{J_{11}\}$，$S_2 = \{J_{21}\}$，设 t_2 时刻机器 M_3 上最优序为 $S_3 = \{J_{31}, J_{32}\}$，共 4 个待加工工件，工件集为 $I = S_1 \cup S_2 \cup S_3$，且 $p_{11} = 3$，$p_{21} = 3$，$p_{31} = 1$，$p_{32} = 4$，由此得，$C_{11} = 3$，$C_{21} = 3$，$C_{31} = 2$，$C_{32} = 6$。**算法 2** 先将 I 整理成 EDD(earliest due date)序：J_{31}，J_{11}，J_{21}，J_{32}。按**算法 2**，J_{31}，J_{32} 安排在 M_2 上加工，J_{11}，J_{21} 为误工工件，以任意序最后安排在 M_2 或 M_3 上加工。故 $A(I) = 2$，但是 $\mathrm{OPT}(I) = 3$，最优序为 M_2 加工 J_{21}，M_3 上加工 J_{31}，J_{32}，误工工件为 J_{11}，以任意序最后安排在 M_2 或 M_3 上加工，该问题性能比为 $\dfrac{2}{3}$。由**定理 3**，**算法 2** 下界为 $\dfrac{2}{3}$，从而对问题 $P3 \mid D = \infty, t_1 < t_2 \mid n - \sum u'_{ij}$，**算法 2** 的渐进性能比的界是紧的。

定理证毕。

4 算法的计算复杂性

Moore 算法复杂性为 $O(n\log n)$，由于**算法 1** 中 4 次利用 Moore 算法，从而**算法 1** 的时间复杂性为 $O(n\log n)$。**算法 2** 也是 4 次利用 Moore 算法，从而**算法 2** 的时间复杂性仍为 $O(n\log n)$。

5 结 语

目前在机器故障中断的问题上，国内外相关研究成果并不太多，而该问题具有广泛的现实意义，且待研究的问题还有很多。笔者认为，可以结合机器有不同就绪时间的问题和工件有就绪时间的问题，在 P(polynomial)问题上寻求新的最优算法及对 NP 困难问题寻求更好的近似算法。

参考文献：

[1] MOORE J M. An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs[J]. Management Science, 1968, 15(3): 102.

[2] 王方，赵传立. 具有学习效应的且加工时间可控的单机排序问题[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2013(4)：471.

[3] 唐国春，张峰，罗守成，等. 现代排序论[M]. 上海：上海科学普及出版社，2003.

[4] LEE C Y, YU G. Single machine scheduling under potential disruption[J]. Operations Research Letters, 2007(35): 1.

[5] 沈灏，杨启帆. 两台机器及时完工工件数最大化问题的近似算法[J]. 高校应用数学学报：A 辑，2003，18(2)：207.

[6] 叶赛英，沈灏，魏小兰. 机器带故障的两台机排序问题的一个近似算法[J]. 杭州电子科技大学学报，2008，28(2)：90.

[7] 叶春花，沈灏. 机器带中断的误工问题的近似排序算法[J]. 杭州电子科技大学学报，2010，30(1)：96.

[8] 魏飞，刘守鹏. 工件带拒绝费用的三台单机排序问题研究[J]. 山东科学，2013(6)：9.

[9] 卢开澄. 算法与复杂性[M]. 北京：高等教育出版社，1995.