

# 快速边界元方法模拟匀速运动声源声场的研究

周 强,李传珍,闫再友

(南京航空航天大学 航空宇航学院,南京 210016)

**摘 要:** 用预修正快速傅里叶变换边界元方法计算亚声速匀速运动声源声场。先将亚声速匀速流动时声场的控制方程,通过普朗特-葛劳涅变换到无流动时声场的控制方程,再利用预修正快速傅里叶变换边界元方法,模拟已知变换域结构表面振动速度的结构声辐射问题。数值解和解析解的对比证明了本研究提出的快速边界元方法之算法和程序的正确性。

**关键词:** 预修正快速傅里叶变换;边界元法;普朗特-葛劳涅变换;声场

**中图分类号:** O422.2;O242.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1671-8798(2016)01-0019-05

## Simulation of acoustic field of sound source moving with constant speed by fast BEM

ZHOU Qiang, LI Chuazhen, YAN Zaiyou

(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,  
Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Simulation of acoustic radiation problems in a subsonic uniform stream using the pre-corrected fast Fourier transformation (FFT) boundary element method (pFFT-BEM) is investigated. The governing equation for acoustic radiation in a subsonic uniform flow is transformed into the corresponding governing equation in the classical acoustic problems by the Prandtl-Glauert transformation. Then the acoustic radiation problem in a subsonic uniform stream is simulated by using the pFFT-BEM. Comparison of the numerical results with the corresponding analytical solutions show the correctness and accuracy of the proposed method.

**Keywords:** pre-corrected FFT; boundary element method; Prandtl-Glauert transformation; acoustic field

---

**收稿日期:** 2015-07-04

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(11172132);江苏高校优势学科建设工程资助项目(苏政办发[2011]6号)

**作者简介:** 周 强(1990—),男,湖北省枣阳人,硕士研究生,研究方向为计算流体力学。

**通信作者:** 闫再友,副教授,博士,主要从事边界元方法与气动声学研究。

飞机以匀速飞行或潜艇以匀速航行时的声传播都可以归结为匀速运动物体或声源的声场。这类问题属于最简单的气动声学问题。通过普朗特-葛劳渥(Prandtl-Glauert)变换,可以把问题的控制方程变换为经典声学波动方程。

边界元非常适合求解频域声学波动方程,其显著的优点是对于无界外问题可以自动满足无穷远处的边界条件。1994年,Wu等<sup>[1]</sup>用边界元方法模拟了亚声速匀速运动声源的声场。近些年来,快速边界元方法的建立极大地提升和扩大了边界元方法的应用范围。

本研究用快速傅里叶变换边界元方法<sup>[2-3]</sup>模拟匀速运动声源的声场,其主要特点是积分核函数对算法影响不大,即对不同问题而言,计算程序所做的修改量不大。

## 1 声学边界元方法

### 1.1 声学亥姆霍兹边界积分方程

对于三维无界外域声学问题,边界元方法都能自动满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件。声学亥姆霍兹边界积分方程(HIE)为

$$C(p)\varphi(p) = \int_S \left[ \frac{\partial G_k(p,q)}{\partial n_q} \varphi(q) - G_k(p,q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n_q} \right] dS_q, \quad (1)$$

三维声学问题的基本解为

$$G_k(p,q) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}. \quad (2)$$

方程(1)和(2)中: $r$ 为场点 $p$ 和源点 $q$ 之间的距离; $C(p)$ 为归一化立体角。对于本研究所采用的三角形常量元,在边界上 $C(p) \equiv 0.5$ 。

### 1.2 复合亥姆霍兹积分方程

亥姆霍兹边界积分方程(1)在求解无界声学外问题时,在某些特征频率下存在解的不唯一性。而 Burton 和 Miller 已经证明了当系数 $\alpha$ 取为纯虚数时,复合亥姆霍兹积分方程(CHIE)(3)对任意频率均有唯一解<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi(p) + \alpha \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(p)}{\partial n_p} = & \int_S \left( \frac{\partial G_k(p,q)}{\partial n_q} \varphi(q) - G_k(p,q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n_q} \right) dS_q + \\ & \alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial n_p} \left[ \int_S \left( \frac{\partial G_k(p,q)}{\partial n_q} \varphi(q) - G_k(p,q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n_q} \right) dS_q \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

通常取 $\alpha = -\frac{i}{k}$ ,其中 $i$ 为虚数单位。

## 2 预修正快速傅里叶变换边界元方法

首先,把一个三维问题的表面离散成 $n$ 个三角形常量单元;然后,用一个长方体来包围该问题的整个表面。该长方体被划分为 $k \times l \times m$ 个大小相同的小立方体,这样,每个小立方体里只包含一些单元。小立方体上均匀分布着栅格点,所有栅格点所构成的网格称为栅格。利用这些小立方体可以定义任意单元的近场和远场<sup>[5-6]</sup>。

单元上的声压或者振动速度可以等效地映射到包含该单元的小立方体的各个节点上去。这样,小立方体各节点上映射的声压或振动速度与原单元上的声压或振动速度就可以产生等效的声场,使原来在单元上的边界积分转换成在所有小立方体的所有离散栅格点上的求和。该求和过程形成了关于小立方体的节点标号的离散卷积形式,所以,它可以通过快速傅里叶变换和逆变换计算。求出小立方体各栅格点上对应的边界积分后,再把这些节点上的计算值映射回到各个单元上去,从而求出各个单元上的边界积分。而由于在近场,边界积分用各栅格点上的求和方式所计算出的结果精度比较低,所以,为了保证计算精度,将用快速傅里叶变换方法所计算的近场值剔除,而代之以近场的直接积分值。因此,该边界元方法

被称为预修正快速傅里叶变换边界元方法。

关于亥姆霍兹边界积分方程(1)和复合亥姆霍兹边界积分方程(3)的预修正快速傅里叶变换边界元方法可分别参考文献[5]和[6]。

### 3 亚声速匀速定常流场中的声场理论

当有流场存在时,声场已经属于气动声学范畴。但是,对于亚声速匀速定常流中的声场可以通过普朗特-葛劳渥变换将声场变成经典声学的声场。这样,亚声速匀速定常流中的声学问题就可以通过预修正快速傅里叶变换声学边界元方法进行数值模拟。

#### 3.1 亚声速匀速定常流场中的声波控制方程

在亚声速匀速定常流场中,频域扰动速度位所满足的控制方程为

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi - 2ikM \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

方程(4)中: $\varphi$  为速度位函数; $k$  为波数; $M$  为匀速流中的马赫数;虚数单位  $i = \sqrt{-1}$ 。假设匀速流流向是沿  $x$  正向。如果采用普朗特-葛劳渥变换<sup>[1]</sup>

$$\tilde{x} = \frac{x}{\beta}, \tilde{y} = y, \tilde{z} = z, \beta = \sqrt{1 - M^2}, \quad (5)$$

并且,令

$$\tilde{\varphi} = \varphi e^{-ik\tilde{x}}, \quad (6)$$

则控制方程(4)被变换为变换域内的亥姆霍兹波动方程

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\varphi} + \tilde{k}^2 \tilde{\varphi} = 0. \quad (7)$$

方程(7)中: $\tilde{\nabla}^2$  为在变换域中的拉普拉斯算子; $\tilde{k}$  为变换域中的波数。

这样,方程(7)可以通过基本解和格林第二恒等式而转变为边界积分方程(1),

$$C(\tilde{\mathbf{x}}) \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{x}}) = \int_S \left( \frac{\partial G_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})}{\partial \tilde{n}_{\tilde{\mathbf{y}}}} \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{y}}) - G_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\tilde{\mathbf{y}})}{\partial \tilde{n}_{\tilde{\mathbf{y}}}} \right) dS_{\tilde{\mathbf{y}}}.$$

其中: $S$  为在变换域中的边界表面; $\tilde{n}_{\tilde{\mathbf{y}}}$  为在变换域边界上的外法向单位向量,方向背离所研究的声域; $G_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$  为变换域内的基本解。对于本文所研究的三维问题,该基本解由方程(2)给出,

$$G_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{4\pi\tilde{r}} e^{-ik\tilde{r}}.$$

在此只研究第二类边界条件问题。根据方程(6)可以得到边界条件的变换式为

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}} = e^{-ik\tilde{x}} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} - ik\varphi \tilde{n}_1 \right] \quad (8)$$

方程(8)中, $\tilde{n}_1$  为单位法向量  $\mathbf{n}$  的  $\tilde{x}$  分量。

由于在边界条件变换方程(8)中含有扰动速度位函数  $\varphi$  对变换域边界上的外法向量  $\mathbf{n}$  的导数,所以,这项用  $\varphi$  和  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  的显示表达对求解非常关键。对于本研究所采用的常量元,这项的显示表达具有一定的难度<sup>[1]</sup>,所以,只重点研究快速边界元方法模拟方程(4)的可行性。在假设  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  已知的情形下进行简单的算法验证。

#### 3.2 亚声速匀速定常流场中声波控制方程的基本解

控制方程(4)的基本解  $G^{[1]}$  的表达式为

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_p)^2 + \beta^2[(y-y_p)^2 + (z-z_p)^2]} - M(x-x_p)}}{\sqrt{(x-x_p)^2 + \beta^2[(y-y_p)^2 + (z-z_p)^2]}}, \beta = \sqrt{1 - M^2}. \quad (9)$$

该基本解的物理意义是:有  $x$  方向匀速流动存在时,位于点  $P = (x_p, y_p, z_p)$  处强度为 1 的点声源的解。

## 4 算法的数值验证

现对由基本解方程(9)所形成的有定常匀速流动的声辐射问题进行数值模拟。虽然问题简单,但是足以证明算法和程序的正确性和计算效率,可为进一步深入研究指明方向。

### 4.1 亚声速匀速流动绕振动椭球的声场的数学模型

选取位于坐标原点强度为 $\frac{\beta}{4\pi}$ 的一个点声源所形成的声辐射问题进行数值模拟。该点声源的速度位方程为

$$\varphi = \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z^2)}-Mx}}{\sqrt{x^2+\beta^2(y^2+z^2)}} \quad (10)$$

现研究沿  $x$  方向的匀速流动  $v_\infty$  绕振动椭球  $x^2+\beta^2 y^2+\beta^2 z^2=\beta^2$  的声辐射问题。设马赫数  $M=0.7$ 。通过普朗特-葛

劳涅变换  $\tilde{x}=\frac{x}{\beta}, \tilde{y}=y, \tilde{z}=z, \tilde{\varphi}=\varphi e^{-i\kappa\tilde{x}}, \kappa=\frac{kM}{\beta}, \tilde{k}=\frac{k}{\beta}$ , 则

该问题变换为在静止流场中绕振动圆球  $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1$  的声辐射问题。

假设在该椭球表面的振动速度由位于椭球中心的一个由基本解方程(10)所描述的点声源产生。即在该边界条件下,图 1 所示模型的声学问题等价于位于椭球中心的一个点声源。这样,在圆球  $\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2=1$  表面上的法向振动速度为

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}} = -\frac{1}{4\pi} (1+i\tilde{k}) e^{-i\tilde{k}\tilde{x}} \quad (11)$$

### 4.2 亚声速匀速流动绕振动椭球的声场的数值模拟

在数值模拟中采用了亥姆霍兹边界积分方程(HIE)和复合亥姆霍兹边界积分方程(CHIE)。变换域圆球表面被细划为 19 200 个三角形常量元,如图 2 所示。

图 3 给出了波数  $k$  为  $0.45 \sim 13 \text{ m}^{-1}$  时,用亥姆霍兹边界积分方程和复合亥姆霍兹边界积分方程模拟所得到的振动椭球表面上  $(0,0,1)$  点的扰动速度位幅值与由方程(10)给出的解析解之间的对比。该图清晰地显示了亥姆霍兹边界积分方程在某些特征频率下解的不唯一现象,而复合亥姆霍兹边界积分方程确实对任意计算频率都是有效的。

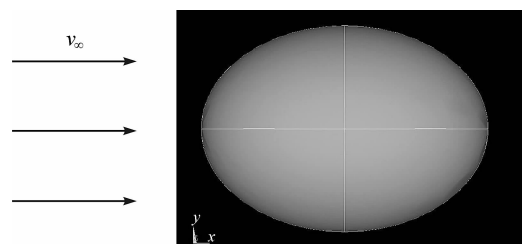


图 1 匀速流动绕振动椭球的声辐射模型

Fig. 1 Acoustic radiation model of a uniform stream past a spheroid

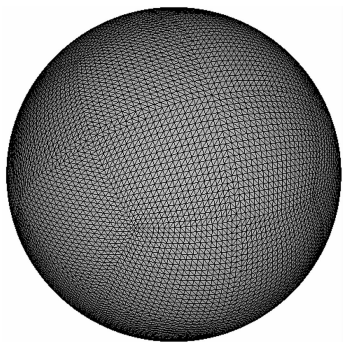


图 2 变换域边界划分

Fig. 2 Discretization of boundary of transformed domain

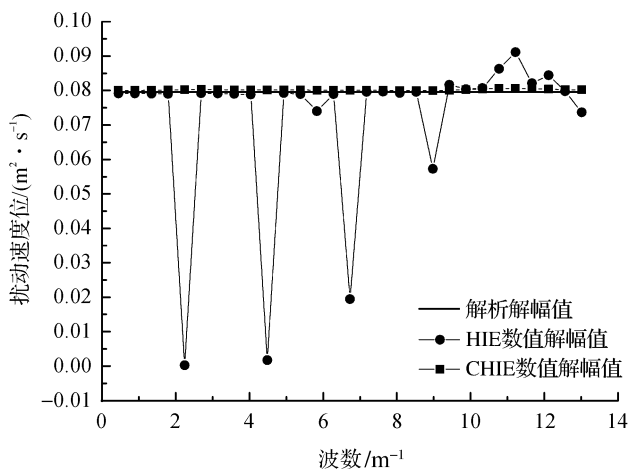


图 3 在点  $(0,0,1)$  处的扰动速度位幅值随波数的变化

Fig. 3 Perturbed velocity potential changing with wave number at point  $(0,0,1)$

由于亚声速匀速流动的结构声辐射问题通过普朗特-葛劳渥变换而变换成对应的无流动的结构声辐射问题,而普朗特-葛劳渥变换所增加的计算时间和所占用的内存都非常小,所以,本文所用的预修正快速傅里叶变换边界元方法的计算效率和所消耗的内存都与无流动时基本相同。即计算时间与单元数的关系是相对  $O(n \log n)$  曲线上下波动;所消耗的内存与单元数的关系也是相对  $O(n \log n)$  曲线上下波动<sup>[4]</sup>。

## 5 结 语

笔者基于三角形常量元,研究了预修正快速傅里叶变换边界元方法模拟亚声速匀速运动声源的声场的可行性。先将亚声速匀速流动时结构的声辐射问题变换到无流动时对应的结构声辐射问题;再利用预修正快速傅里叶变换边界元方法,模拟已知变换域结构表面振动速度的有亚声速匀速流动的结构声辐射问题。数值结果与对应的解析解验证了算法的正确性。需说明的是,这里所进行的数值模拟是在假设变换域结构表面振动速度已知的情形下完成的。若模拟实际问题,需要建立基于高阶单元的预修正快速傅里叶变换边界元方法。

### 参考文献:

- [1] WU T W, LEE L. A direct boundary integral formulation for acoustic radiation in a subsonic uniform flow [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 175(1): 52-53.
- [2] PHILLIPS J R. Rapid solution potential integral equations in complicated 3-dimensional geometries [D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 1997:133.
- [3] YAN Z Y, ZHANG J, YE W. Rapid solution of 3-D oscillatory elastodynamics using the pFFT accelerated BEM [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2010, 34(11): 956.
- [4] BURTON A J, MILLER G F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems [J]. Proceeding of the Royal Society A, 1971, 323(1553): 206.
- [5] YAN ZY. Simulation of acoustics scattering by the fast BEM approach [J]. Journal of Hydrodynamics, 2010, 22(5): 948.
- [6] YAN Z Y, GAN X W. The development of the pFFT accelerated BEM for 3-D acoustic scattering problems based on the Burton and Miller's integral formulation [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2013, 37(2):412.