浙江科技学院学报，第 31 卷第 6 期，2019 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 31 No. 6，Dec. 2019

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2019.06.001

邻近纽结间的行列式

陶志雄
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：研究了如果 d 是 $\det(K)$、$\det(L)$的最大公因子时，方程 $x^2=-1$ 在$\mathbb{Z}^*_{\det(K)/d}$有解的条件。证明了若 K 和 L 的邻近性可以通过分别改变 K 的一个正交叉或者负交叉来实现，则在$\mathbb{Z}^*_{\det(K)/d}$、$\mathbb{Z}^*_{\det(L)/d}$中，该方程都有解。

关键词：纽结；行列式；邻近；号差；乘法群

中图分类号：O189.24　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2019)06-0433-03

Determinant between adjacent knots

TAO Zhixiong
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，Zhejiang，China）

Abstract：This paper focused on the solvability condition for the equation $x^2=-1$ in $\mathbb{Z}^*_{\det(K)/d}$，when d being the greatest common factor of $\det(K)$ and $\det(L)$. It proves that the equation is solvable in both $\mathbb{Z}^*_{\det(K)/d}$ and $\mathbb{Z}^*_{\det(L)/d}$，if the adjacency of K and L can be realized by changing a positive crossing or negative crossing of K respectively.

Keywords：knot；determinant；adjacency；signature；multiplicative group

引　言

两个纽结 K_1、K_2 称为邻近的，假如改变纽结 K_1 的一个交叉就可以得到纽结 K_2。一般而言，以往大多数情形，我们关心一个纽结改变一个交叉后是否成为平凡纽结。对这种情形，Stoimenow[1] 已经证明了当改变一个正交叉或者负交叉时都可以使得纽结 K 改变为平凡纽结（例如解数为 1 的无手征纽结），那么乘法群$\mathbb{Z}^*_{\det(K)}$（$\mathbb{Z}_{\det(K)}$是所有乘法可逆元组成的群，即所有与 $\det(K)$互素的元，例如$\mathbb{Z}^*_{15}=\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$，$\det(K)$的定义[2-3] 见下面的**命题 1**）含有$-1$ 的平方根。

在本文中，我们将推广这一结论，即证明以下结论：

定理 1　设 K 与 L 是两个纽结，d 是 $\det(K)$、$\det(L)$的最大公因子，若改变 K 的一个正交叉或者一个负交叉都使得 K 变为 L，则在$\mathbb{Z}^*_{\det(K)/d}$和$\mathbb{Z}^*_{\det(L)/d}$中，方程 $x^2=-1$ 都有解。

收稿日期：2019-02-27

通信作者：陶志雄（1961—　），男，浙江省绍兴人，副教授，博士，主要从事几何拓扑学研究。E-mail：taozhx@zust.edu.cn。

推论 1　设 K 与 L 是两个邻近纽结，且 $\det(K)$ 与 $\det(L)$ 互素，若改变 K 的一个正交叉或者负交叉都可以使得 K 变为 L，则在 $\mathbb{Z}^*_{\det(K)}$ 和 $\mathbb{Z}^*_{\det(L)}$ 中，方程 $x^2=-1$ 都有解。

推论 2　若对于纽结 K，在 $\mathbb{Z}^*_{\det(K)}$ 中方程 $x^2=-1$ 无解，则不存在纽结 L 使得 $\det(K)$ 与 $\det(L)$ 是互素的，同时改变 K 的一个正交叉和负交叉都是 L。

例如，纽结 10_{15}、10_{16} 的行列式分别是 43、47[4]，号差(signature)都是 2，但 $x^2=-1$ 在 $\mathbb{Z}^*_{43}$、$\mathbb{Z}^*_{47}$ 中都无解。因此，不可能既通过改变正交叉又可以通过改变一个负交叉都得到对方。

再如，10_{81} 的行列式为 85，号差为 0。容易看到在 $\mathbb{Z}^*_{85}$ 中 $x^2=-1$ 有解。对于 10_{87}，它的行列式是 81，号差也为 0，尽管这两个纽结的行列式互素，但由于 $\mathbb{Z}^*_{81}$ 中 $x^2=-1$ 无解，根据**定理 1** 说明它们之间不可能有既通过改变正交叉又可以通过改变一个负交叉得到对方的关系。

1　基本知识

已定向的纽结 K 的正则投影(regular diagram)必定决定了一张可定向的 Seifert 曲面 S，它是一张可定向的曲面，边界就是 K，详细的做法见参考文献[2-5]，如果该曲面的 n 条闭曲线 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $H_1(S)$(S 的同调群)的生成元的代表元，$\alpha_1^\#,\alpha_2^\#,\cdots,\alpha_n^\#$ 分别表示这些闭曲线往曲面的正方向少许提升(lift)使得稍离曲面所得的闭曲线，那么矩阵 $\boldsymbol{M}=(lk(\alpha_i,\alpha_j^\#))_{n\times n}$ 就称为纽结 K 的 Seifert 矩阵，其中 $lk(\alpha_i,\alpha_j^\#)$ 表示了链环 $\alpha_i\cup\alpha_j^\#$ 的链环数($i,j=1,2,\cdots,n$)。可以证明如果 D_K 表示 S^3 关于 K 的二重分歧复盖，则 $H_1(D_K)$ 可以配(equipped with)一个链环数型(linking form)，它是一个双线性型[4,6-8]：

$$\lambda: H_1(D_K)\times H_1(D_K)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}。$$

那么这个链环数型就是纽结的 Goeritz 矩阵(也就是 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$)的逆矩阵 $(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})^{-1}$[6-7,9](这里要注意的是纽结的 Goeritz 矩阵就是 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$)。对于 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，我们有以下结论：

命题 1[2-3]　若 $\boldsymbol{M}$ 是纽结 K 的 Seifert 矩阵，则 $|\det(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})|$ 是一个纽结不变量。因此，这个不变量就称为 K 的行列式，记为 $\det(K)$(它总是一个奇数)。

$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$ 的号差也称为纽结 K 的号差[2-5]。

纽结或链环的正负交叉如图 1 所示。

(a) 正交叉　　(b) 负交叉

图 1　正负交叉

Fig. 1　Positive crossing and negative crossing

2　定理的证明

设 K 有一个投影图(diagram)，改变它的一个正交叉得到 L，若如图 2 所示的是 K 与 L 的唯一不同处，阴影部分为 K 的 Seifert 曲面 S，设唯一经过这个交叉而且是 $H_1(S)$ 的生成元为 α_1，其他的生成元为 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，改变图 2 所示的交叉后所得到 L 的 Seifert 曲面 S'，相应地，若假设 K 和 L 的 Seifert 矩阵分别是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$。比较得到：若 $(i,j)\neq(1,1)$，则 $a_{ij}=b_{ij}$，而 $a_{11}=b_{11}-1$。这样，由于 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 与 $\det(K)$ 至多仅差一个符号，而且 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})>0$。为了说明这个不等式，将矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第一行第一列分别后移到最后一行和最后一列，分别得到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$，且 $\det(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\det(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。注意到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的前 $n-1$ 个顺序主子式是相同的，最后一个顺序主子式分别是 $\det(\boldsymbol{P})$ 和 $\det(\boldsymbol{Q})$，根据文献[3]定理 2.4.7(2)知道，改变一个纽结的正(负)交叉使得其号差加(减)2 或者不变，而 K 分别改变一个正交叉和一个负交叉都得到 L，即它们的号差是一样的(对称矩阵的号差定义：如果 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的顺序主子式分别是 $D_1,D_2,\cdots,D_n$，则其号差为 $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\mathrm{sign}(D_jD_{j+1})$，$D_0=1$，见文献[4])。也即 $\det(\boldsymbol{P})$ 和 $\det(\boldsymbol{Q})$ 是同号的，$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})>0$。

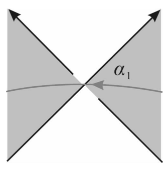

图 2　S 和 α_1

Fig. 2　S and α_1

若 A_{ij} 是 a_{ij}($i,j=1,2,\cdots,n$)的代数余子式，则按行列式的第一行展开，有

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = 2a_{11}A_{11} + (a_{12}+a_{21})A_{12} + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})A_{1n} = (2b_{11}-2)A_{11} + (a_{12}+a_{21})A_{12} + \cdots + (a_{1n}+a_{n1})A_{1n} = \det(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) - 2A_{11},$$

所以,

$$A_{11} = \frac{\det(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) - \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}{2}。$$

设 $H_1(D_K)$中 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第一行第一列的元为 g_1,如果 $\lambda: H_1(D_K)\times H_1(D_K)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 $H_1(D_K)$上的链环数型,可知该链环数型为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$,即为$\frac{1}{\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}(A_{ij})_{n\times n}$,这里$(A_{ij})_{n\times n}$是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的伴随矩阵。因为 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})>0$,因此 $\lambda(g_1,g_1)=\frac{\det(L)-\det(K)}{2\det(K)}$。令 $g=2g_1$,并设$\det(K)=dD_1$,$\det(L)=dD_2$,有 $\lambda(g,g)=\frac{2D_2}{D_1}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。因为改变 K 的一个负交叉也使得其变为 L,同理可证有另一个元 $h\in H_1(D_K)$,使得 $\lambda(h,h)=-\frac{2D_2}{D_1}\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。

如果乘法群$\mathbb{Z}_{D_1}^{*}=\{1=x_1,x_2,\cdots,x_s\}$,其中 s 表示 $1,2,3,\cdots,D_1$ 中与 D_1 互素的个数,那么,显然有

$$\mathbb{Z}_{D_1}^{*}=\{\lambda(x_jg,x_jg)D_1=2x_j^2D_2, j=1,2,\cdots,s\},$$

$$\mathbb{Z}_{D_1}^{*}=\{\lambda(x_ih,x_ih)D_1=-2x_i^2D_2, i=1,2,\cdots,s\}。$$

换言之,存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,s\}$,使得在$\mathbb{Z}_{D_1}^{*}$有 $2x_j^2D_2=-2x_i^2D_2$,也即 $x_j^2x_i^{-2}=-1$ 在乘法群$\mathbb{Z}_{D_1}^{*}$里成立。只要将上述证明中 K 和 L 互换即可得到**定理 1** 剩下结论的证明。这样就完成了**定理 1** 的证明。

3 结　语

本文对能够通过正、负交叉的改变都可以得到另一个的这样两个邻近纽结,研究了方程 $x^2=-1$ 在某个群是否有解的问题,通过改变 Stoimenow 的方法,从而推广了他的研究结果。

参考文献:

[1] STOIMENOW A. Polynomial values, the linking form and unknotting numbers[J]. Mathematical Research Letters, 2004(11):755.

[2] ADAMS C C. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004:95.

[3] MURASUGI K. Knot theory and its applications[M]. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1996:75.

[4] BURDE G, ZIE C. Knots[M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1985:19.

[5] KAUFFMAN L H. On knots[M]. Princeton: Princeton University Press, 1987:60.

[6] LICKORISH W B R. The unknotting number of a classical knot[C]//Contemporary Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1985:117.

[7] GORDON C M, LITHERLAND R A. On the signature of a link[J]. Inventiones Mathematicae, 1978, 47(1):53.

[8] MURAKAMI H, YASUHARA A. Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot[J]. Proceedings of the Amerian Mathematical Society, 2000, 128(12):3693.

[9] MONTESINOS J M. Surgery on links and double branched covers of S^3[M]//NEUWIRTH L P. Knots, groups, and 3-manifolds. Princeton: Princeton University Press, 1975:227.