

带趋势项 ESTAR 模型单位根检验的渐进分布

胡俊娟, Murtala Adam Muhammad

(浙江科技学院 理学院, 杭州 310023)

摘要: 对 2 种不同形式的带趋势项 ESTAR(exponential smooth transition autoregression, 指数平滑转换自回归)模型的单位根检验进行研究, 基于辅助方程, 给出了带趋势项 ESTAR 模型 2 种不同形式下 KSS(Kapetanios-Shin-Snell)检验统计量的极限分布。通过对比发现, 2 种带趋势项形式下检验统计量的极限分布并不一致。这一结果表明采用带趋势项 ESTAR 模型建模前需对这 2 种形式加以区分, 对模型进行单位根检验时, 由于极限分布并不一致, 不能都采用 OLS(ordinary least squares, 常规最小二乘法)去趋势的临界值给出检验结果, 否则会导致结果不可靠。这为进一步对带确定性趋势项 STAR(smooth transition autoregression, 平滑转换自回归)模型单位根检验的研究提供了理论参考, 也为后续提高带趋势项 STAR 单位根检验功效提供了新思路。

关键词: 单位根检验; 线性趋势; 指数平滑转换自回归模型

中图分类号: O212; F222 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-8798(2021)06-0448-06

Asymptotic distribution of unit root test based on ESTAR model with trend term

HU Junjuan, Murtala Adam Muhammad

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: The unit root test of two different forms of ESTAR (exponential smooth transition autoregression) model with trend term was discussed to figure out the limit distribution of KSS (Kapetanios-Shin-Snell) test statistics under two different forms of ESTAR model with trend term, based on the auxiliary equation. By comparison, it is found that the limit distributions of test statistics are not consistent in the two models with trend terms. This result shows that the two forms need to be distinguished before ESTAR model with trend term is used. Because the limit distribution is not consistent, the conventional OLS (ordinary least squares) detrended critical value cannot be used to give the test results, otherwise the results would be unreliable, which provides theoretical references for further research on unit root test of STAR (smooth transition autoregression) model with deterministic trend and a new way to further improve the

收稿日期: 2020-12-23

基金项目: 浙江科技学院研究生教学改革项目(研究生院[2018]2号)

通信作者: 胡俊娟(1979—), 女, 浙江省兰溪人, 讲师, 博士, 主要从事时间序列分析研究。E-mail: hujunjuan@163.com。

power of STAR unit root test with trend term.

Keywords: unit root test; linear trend; ESTAR (exponential smooth transition autoregression) model

近年来,由于 STAR(smooth transition autoregression,平滑转换自回归)模型在对时间序列动态中机制转换非线性特征的描述上,具有一般性和灵活性的特点,被广泛应用于汇率^[1]、通货膨胀率^[2-3]、失业率^[4]、股市^[5]等金融与经济领域。在日常生活中,宏观时间序列数据通常具有明显的时间趋势特征,在建模前需对时间序列平稳性进行分析,因此对带线性趋势的时间序列进行单位根检验(检验平稳性)具有广泛的实际意义,进而带趋势项 STAR 模型的单位根检验受到了国内外研究者的广泛关注^[6-7]。

对带确定性趋势(或者截距)的线性 AR(autoregression,自回归)模型的 2 种表达形式而言,通过对模型化简可知二者具有相同的波动部分,因此对这 2 种带确定性趋势的 AR 模型进行单位根检验会得到一致的结论,然而对带确定性趋势项的 STAR 过程而言,2 种形式却包含了不同的波动部分^[6]。如果对这 2 种形式带趋势项的 STAR 模型的单位根检验不加以区分,会导致检验结果的不可靠,如 Zhang^[8] 和 Kaufmann 等^[9] 针对不同形式带趋势项 STAR 模型进行了线性检验,所得结论不同。目前关于带趋势 ESTAR(exponential smooth transition autoregression,指数平滑转换自回归)模型的单位根检验研究较侧重于去趋势的各种方法^[7,10,11],鲜有文献对模型的 2 种不同形式加以区别研究。因此,我们对 ESTAR 模型 2 种形式的单位根检验进行研究,基于模型在不同形式下相应的辅助方程,考察 KSS(Kapetanios-Shin-Snell)检验统计量的极限分布,从而对 2 种形式单位根检验从根本上加以区分,并且还拓宽对带确定性趋势项 STAR 模型的单位根检验的研究打下一定的理论基础。

1 KSS 检验

考虑以下一阶带确定性趋势项 ESTAR 模型:

$$\Delta y_t = a + bt + \gamma y_{t-1} (1 - \exp\{-\theta y_{t-1}^2\}) + \varepsilon_t, \theta > 0, \quad (1)$$

或

$$y_t = a + bt + e_t, \Delta e_t = \gamma e_{t-1} (1 - \exp\{-\theta e_{t-1}^2\}) + \varepsilon_t, \theta > 0. \quad (2)$$

式(1)~(2)中:误差项 ε_t 是方差为 σ^2 且 $\sup_t E(\varepsilon_t^6) < \infty$ 的鞅差序列。如果式(1)~(2)中 $\gamma=0$ 或 $\theta=0$,则 ESTAR 模型简化为 AR 模型。

Kapetanios 等^{[12]363} 证明了当 $-2 < \gamma < 0$ 时,无趋势项的 ESTAR 模型是全局平稳的,而本文主要研究带趋势项 ESTAR 模型的单位根检验,即检验带趋势的时间序列是带漂移项的单位根过程(非平稳过程)还是带线性趋势项的平稳 ESTAR 过程。当时序 y_t 有非零均值或线性趋势项时,Kapetanios 等^{[12]364} 建议先去均值或去趋势项再进行单位根检验,即当 $y_t = \hat{l}'d_t + \tilde{y}_t$ 时,其中 $d_t = 1$ 或 $d_t = (1 \ t)'$,则考虑 $\tilde{y}_t = x_t - \hat{l}'d_t$,其中 \hat{l} 为常规最小二乘(OLS)估计量,然后对 \tilde{y}_t 进行单位根检验。根据泰勒展开,辅助方程为

$$\Delta \tilde{y}_t = \delta \tilde{y}_{t-1}^3 + e_t. \quad (3)$$

式(3)中: e_t 为误差项。进一步,Kapetanios 等^{[12]363} 提出了检验 $H_0: \delta=0$ 的 t 检验(又称 KSS 检验),检验统计量 t_{KSS} 的极限分布为

$$t_{KSS} \Rightarrow \frac{\int_0^1 W^3(r) dW(r)}{\sqrt{\int_0^1 W^6(r) dr}}. \quad (4)$$

当 y_t 具有非零均值或带趋势项时,相应的 KSS 检验统计量 $t_{KSS}^{\mu}, t_{KSS}^{\tau}$ 的极限分布分别用去均值布朗运动($W^{\mu}(r)$)或去趋势的布朗运动($W^{\tau}(r)$)去代替式(4)中的 $W(r)$ ^{[13]362},其中

$$W^{\mu}(r) = W(r) - \int_0^1 W(r) dr;$$

$$W^{\tau}(r) = W(r) - (4-6r) \int_0^1 W(r) dr - (12r-6) \int_0^1 rW(r) dr.$$

2 主要结论

KSS 检验统计量的极限分布是基于 OLS 去趋势方法进行的,即考察的是基于式(2)模型的单位根检验。对式(1)通过泰勒展开可以得到以下辅助方程:

$$\Delta y_t = a + bt + \delta y_{t-1}^3 + u_t. \quad (5)$$

采用 KSS 统计量: $t = \frac{\hat{\delta}}{\text{s.e.}(\hat{\delta})}$ 来考察式(1)的单位根检验,对应非零均值过程($a \neq 0, b = 0$)和带趋势项过程($b \neq 0$)时分别记作 t^μ, t^τ 。基于辅助方程式(5)进行单位根检验,即检验原假设 $H_0: \delta = 0$ 和备择假设 $H_1: \delta < 0$,以下定理 1 和定理 2 给出了 t^μ 和 t^τ 的极限分布。

定理 1 假设 $\Delta y_t = \epsilon_t$, 则

$$t^\mu \Rightarrow \frac{\int_0^1 W^3(r) dW(r) - W(1) \int_0^1 W^3(r) dr}{\sqrt{\int_0^1 W^6(r) dr - \left[\int_0^1 W^3(r) dr \right]^2}}.$$

“ \Rightarrow ”表示弱收敛。在备择假设下,即基于式(5) ($b = 0$) 情况下带均值 ESTAR 模型的检验统计量 t^μ 具有一致性,且以速率 T (样本量) 收敛。

证明:根据辅助方程式(5) ($b = 0$),在原假设 H_0 下 OLS 估计量

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T u_t \\ \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 u_t \end{pmatrix}.$$

两边同乘对角阵 $(T^{\frac{1}{2}}, T^2)$, 有

$$\begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} \hat{a} \\ T^2 \hat{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & T^{-4} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T u_t \\ T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 u_t \end{pmatrix}.$$

根据定理 1 的假设,则在辅助方程式(5)中 $u_t = \epsilon_t$ 。根据随机积分的弱收敛定理和 ϵ_t 的半鞅性质^[14], 则有

$$\begin{aligned} T^{-(\frac{i}{2}+1)} \sum_t y_{t-1}^i &\Rightarrow \sigma^i \int_0^1 W^i(r) dr, i = 2, \dots, 6; \\ T^{-2} \sum_t y_{t-1}^3 u_t &\Rightarrow \sigma^4 \left[\frac{1}{4} W^4(1) - \frac{3}{2} \int_0^1 W^2(r) dr \right]; \\ T^{-\frac{3}{2}} \sum_t y_{t-1}^2 u_t &\Rightarrow \frac{1}{3} \sigma^3 W^3(1), T^{-1} \sum_t y_{t-1} u_t \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2 [W^2(1) - 1]. \end{aligned}$$

因此我们可以得到

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & T^{-4} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sigma^3 \int_0^1 W^3(r) dr \\ \sigma^3 \int_0^1 W^3(r) dr & \sigma^6 \int_0^1 W^6(r) dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 W^3(r) dr \\ \int_0^1 W^3(r) dr & \int_0^1 W^6(r) dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} T^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^T u_t \\ T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 u_t \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma W(1) \\ \sigma^4 \left[\frac{1}{4} W^4(1) - \frac{3}{2} \int_0^1 W^2(r) dr \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(1) \\ \frac{1}{4} W^4(1) - \frac{3}{2} \int_0^1 W^2(r) dr \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在 H_0 下, $(s.e.(\hat{\delta}))^2 = s_u^2(0 \ 1) \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 s_u^2 是 σ^2 的 OLS 估计量, 因此 $s_u^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ 。

进一步有

$$T^4(s.e.(\hat{\delta}))^2 = s_u^2(0 \ 1) \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$s_u^2(0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 \\ T^{-\frac{5}{2}} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^3 & T^{-4} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则

$$t^\mu = \frac{\hat{\delta}}{s.e.(\hat{\delta})} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}W^4(1) - \frac{3}{2}\int_0^1 W^2(r)dr - W(1)\int_0^1 W^3(r)dr}{\sqrt{\int_0^1 W^6(r)dr - \left[\int_0^1 W^3(r)dr\right]^2}} = \frac{\int_0^1 W^3(r)dW(r) - W(1)\int_0^1 W^3(r)dr}{\sqrt{\int_0^1 W^6(r)dr - \left[\int_0^1 W^3(r)dr\right]^2}}.$$

在备择假设下, $\Delta y_t, y_{t-1}^i$ 都是 $I(0)$ 过程, 容易得出 $t^\mu = O_p(T)$, 即以速率 T 收敛, 得证。

文献[8]给出了相应的结论, 但没有给出证明。而 Kapetanios 等^{[12]364} 和 Hanck^{[13]362} 给出式(2)的 t^μ

的极限分布为 $t_{KSS}^\mu \Rightarrow \frac{\int_0^1 [W^\mu(r)]^3 dW^\mu(r)}{\sqrt{\int_0^1 [W^\mu(r)]^6 dr}}$, 通过计算可得极限分布为

$$\frac{\frac{W^4(1)}{4} - W(1)\left[\int_0^1 W(r)dr\right]^3 + \frac{3}{2}W^2(1)\left[\int_0^1 W(r)dr\right]^2 - W^3(1)\int_0^1 W(r)dr - \frac{3}{2}\left\{\int_0^1 W^2(r)dr - \left[\int_0^1 W(r)dr\right]^2\right\}}{\sqrt{\int_0^1 \left[W(r) - \int_0^1 W(r)dr\right]^6 dr}}.$$

通过对上述极限分布的对比发现, 对于具有均值过程的时序, 基于式(1)和式(2)的模型检验统计量极限分布不一致, 因此临界值不一样, 对这2种形式的模型不加以区分, 直接用去趋势 KSS 检验临界值对式(1)进行单位根检验, 所得检验结果必定不可靠。

定理 2 假设 $\Delta y_t = a + \epsilon_t$ 且 $y_0 = 0$, 则

$$t^\tau = \frac{\hat{\delta}}{s.e.(\hat{\delta})} \Rightarrow \frac{\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{B}_1}{\sqrt{\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}}}. \quad (6)$$

式(6)中: $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}$ 和 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ 分别为矩阵 $\mathbf{A}(W(r)), \mathbf{B}(W(r))$ 的分块矩阵, 具体形式参见以下证明。

证明: 在原假设下 $\Delta y_t = a + \epsilon_t, y_0 = 0$, 则有 $y_t = at + \sum_{i=1}^t \epsilon_i$ 。这意味着 $y_t - at$ 和 $\sum_{i=1}^t \epsilon_i$ 有着同样的收敛性。令 $y_t - at = z_t, \Delta y_t - a = \Delta y_t^*$, 则辅助方程式(5)为

$$\Delta y_t^* = bt + a^3(t-1)^3 + 3\delta^2 a z_{t-1}^2(t-1) + 3\delta a^2 z_{t-1}(t-1)^2 + \delta z_{t-1}^3 + u_t.$$

不妨记

$$\Delta \mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} \Delta y_1^* \\ \vdots \\ \Delta y_T^* \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3z_1^2 & 3z_1 & z_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T & (T-1)^3 & 3z_{T-1}^2(T-1) & 3z_{T-1}(T-1)^2 & z_{T-1}^3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b \\ a^3 \\ \delta^2 a \\ \delta a^2 \\ \delta \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_T \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

有 $\Delta Y^* = X\beta + U$ 。在原假设下(过程为带漂移的单位根过程), β 的 OLS 估计量为 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$, 其中 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)'$ 。根据随机积分的弱收敛定理和 ε_t 的半鞅性质, 则有

$$\begin{aligned} T^{-(\frac{1}{2}+1)} \sum_t z_{t-1}^i &\Rightarrow \sigma^i \int_0^1 W^i(r) dr, i = 2, \dots, 6; \\ T^{-(\frac{1}{2}+1+i)} \sum_t z_{t-1}^j t^i &\Rightarrow \sigma^j \int_0^1 r^i W^j(r) dr, i, j = 1, \dots, 5; \\ T^{-(\frac{1}{2}+i)} \sum_t t^i \varepsilon_t &\Rightarrow \sigma \int_0^1 r^i dW(r), i = 1, 2, 3; \\ T^{-(\frac{1}{2}+1+i)} \sum_t t^i z_{t-1}^j \varepsilon_t &\Rightarrow \sigma^{j+1} \int_0^1 r^i W^j(r) dW(r), i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

根据连续映射定理, 我们可以得到 $[\gamma^{-1}(X'X)\gamma^{-1}] \Rightarrow H(W(r), \sigma)$, 且 $[\gamma^{-1}(X'\varepsilon)] \Rightarrow Q(W(r), \sigma)$, 其中

$$H(W(r), \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3\sigma^2 \int_0^1 r^2 W^2(r) dr & 3\sigma \int_0^1 r^3 W(r) dr & \sigma^3 \int_0^1 r W^3(r) dr \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3\sigma^2 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 3\sigma \int_0^1 r^5 W(r) dr & \sigma^3 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr \\ 3\sigma^2 \int_0^1 r^2 W^2(r) dr & 3\sigma^2 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 9\sigma^4 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr & 9\sigma^3 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 3\sigma^5 \int_0^1 r W^5(r) dr \\ 3\sigma \int_0^1 r^3 W(r) dr & 3\sigma \int_0^1 r^5 W(r) dr & 9\sigma^3 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 9\sigma^2 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 3\sigma^4 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr \\ \sigma^3 \int_0^1 r W^3(r) dr & \sigma^3 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 3\sigma^5 \int_0^1 r W^5(r) dr & 3\sigma^4 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr & \sigma^6 \int_0^1 W^6(r) dr \end{pmatrix},$$

$$Q(W(r), \sigma) = \left(\sigma \int_0^1 r dW(r) \quad \sigma \int_0^1 r^3 dW(r) \quad 3\sigma^3 \int_0^1 r W^2(r) dW(r) \quad 3\sigma^2 \int_0^1 r^2 W(r) dW(r) \quad \sigma^4 \int_0^1 W^3(r) dW(r) \right)',$$

γ 为 5×5 的对角元素 $(T^{\frac{3}{2}} \quad T^{\frac{7}{2}} \quad T^{\frac{5}{2}} \quad T^3 \quad T^2)$ 的对角阵。令 $D(\sigma)$ 为 5×5 的对角元素 $(1 \quad 1 \quad \sigma^2 \quad \sigma \quad \sigma^3)$ 的对角阵, $E(\sigma)$ 为 5×5 的对角元素 $(\sigma \quad \sigma \quad \sigma^3 \quad \sigma^2 \quad \sigma^4)$ 的对角阵, 则有 $H(W(r), \sigma) = D(\sigma)A(W(r))D(\sigma)$ 和 $Q(W(r), \sigma) = E(\sigma)B(W(r))$, 其中

$$A(W(r)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 \int_0^1 r^2 W^2(r) dr & 3 \int_0^1 r^3 W(r) dr & \int_0^1 r W^3(r) dr \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 3 \int_0^1 r^5 W(r) dr & \int_0^1 r^3 W^3(r) dr \\ 3 \int_0^1 r^2 W^2(r) dr & 3 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 9 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr & 9 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 3 \int_0^1 r W^5(r) dr \\ 3 \int_0^1 r^3 W(r) dr & 3 \int_0^1 r^5 W(r) dr & 9 \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 9 \int_0^1 r^4 W^2(r) dr & 3 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr \\ \int_0^1 r W^3(r) dr & \int_0^1 r^3 W^3(r) dr & 3 \int_0^1 r W^5(r) dr & 3 \int_0^1 r^2 W^4(r) dr & \int_0^1 W^6(r) dr \end{pmatrix},$$

$$B(W(r)) = \left(\int_0^1 r dW(r) \quad \int_0^1 r^3 dW(r) \quad 3 \int_0^1 r W^2(r) dW(r) \quad 3 \int_0^1 r^2 W(r) dW(r) \quad \int_0^1 W^3(r) dW(r) \right)'.$$

因为在原假设下 $H_0: \delta = 0$ 可以写成 $H_0: R\beta = 0$, 其中 $R = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$, 则通过计算可得

$$\begin{aligned} T^2 \hat{\delta} &= R\gamma \hat{\beta} \Rightarrow \sigma R D^{-1}(\sigma) A^{-1}(W(r)) B(W(r)), \\ T^4 (\text{s. e.}(\hat{\delta}))^2 &= T^4 \sigma^2 R (X'X)^{-1} R' \Rightarrow \sigma^2 R D^{-1}(\sigma) A^{-1}(W(r)) D^{-1}(\sigma) R'. \end{aligned}$$

把矩阵 $A(W(r))$ 分块, 令 $A(W(r)) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{21} 分别是 $A(W(r))$ 中对应的

4×4 、 4×1 、 1×4 矩阵, $A_{22} = \int_0^1 W^6(r) dr$ 。令 $B(W(r)) = (B_1 \quad B_2)'$, 其中

$$B_1 = \left(\int_0^1 r dW(r) \quad \int_0^1 r^3 dW(r) \quad 3 \int_0^1 r W^2(r) dW(r) \quad 3 \int_0^1 r^2 W(r) dW(r) \right)', B_2 = \int_0^1 W^3(r) dW(r).$$

因此, 则有

$$t^r = \frac{T^2 \hat{\delta}}{\sqrt{T^4 (\text{s. e.}(\hat{\delta}))^2}} \Rightarrow \frac{R A^{-1}(W(r)) B(W(r))}{\sqrt{R A^{-1}(W(r)) R'}} = \frac{B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1}{\sqrt{A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}}}.$$

得证。

在上述定理1和定理2中,由于 y_0 是有界的随机变量或者是常数,其相应的极限分布不变^[15],为了证明方便起见,我们假设 $y_0 = 0$ 。基于式(2)的模型在原假设下 $t_{\text{KSS}} \Rightarrow \frac{\int_0^1 [W^\tau(r)]^3 dW^\tau(r)}{\sqrt{\int_0^1 [W^\tau(r)]^6 dr}}$,其中 $W^\tau(r) = W(r) - (4-6r)\int_0^1 W(r)dr - (12r-6)\int_0^1 rW(r)dr$ 。对比二者极限分布,发现分子分母均含有 $W(r)$ 最高次 $\int_0^1 W^3(r)dW(r)$ 、 $\int_0^1 W^6(r)dr$,但其他项却不完全相同,基于带趋势项式(1)和式(2)二者单位根检验极限分布并不相同,因此要对这2种情况加以区别对待。

3 结 语

定理1和定理2说明了不同形式带趋势项的ESTAR模型 t 检验统计量的极限分布并不相同,因此在分析带趋势项过程时,单纯地使用先去趋势然后用常用的临界值表检验法并不十分科学。考虑到带趋势项的非线性ESTAR模型的2种形式导致的波动不一致,本研究从理论角度给出了证明,这一结果为带确定性趋势项ESTAR模型单位根检验的研究提供了理论参考,故建议在采用带趋势项ESTAR模型建模分析数据时,应对采用式(1)还是式(2)加以区分。本研究侧重考虑的是带趋势项ESTAR模型的2种不同形式的极限理论,考察的是常用的线性趋势部分,接下来我们将会把研究进一步扩展到傅里叶趋势^[16]情景中去,以进一步拓宽带趋势项ESTAR模型单位根检验的研究思路。

参考文献:

- [1] 吴安兵,金春雨. 货币政策、产出冲击对人民币实际汇率波动的影响效应[J]. 国际金融研究,2019,392(12):25.
- [2] SEKINE A. Oil price pass-through to consumer prices and the inflationary environment: a STAR approach[J]. Applied Economics Letters,2020,27(6):484.
- [3] 高伟刚,步艳红. 基于门限自回归模型的通胀率与利率走势研究[J]. 债券,2020,95(5):55.
- [4] BURAK G, TIFTIKIGIL B Y, TRAOLU M. Testing for unemployment hysteresis in Turkey: evidence from nonlinear unit root tests[J]. Quality & Quantity: International Journal of Methodology,2017,51(1):35.
- [5] 汪卢俊. 基于LSTAR模型的中国股市泡沫风险识别[J]. 统计研究,2018,35(12):104.
- [6] 胡俊娟,章迪平. 基于带确定性趋势ESTAR模型的单位根检验[J]. 统计与决策,2020,36(7):19.
- [7] OTERO J, SMITH J. Response surface models for OLS and GLS detrending-based unit-root tests in nonlinear ESTAR models[J]. Stata Journal,2017,17(3):704.
- [8] ZHANG L. Test for linearity against STAR models with deterministic trends[J]. Economics Letters,2012,115(1):16.
- [9] KAUFMANN H, KRUSE R, SIBBERTSEN P. On tests for linearity against STAR models with deterministic trends[J]. Economics Letters,2012,117(1):268.
- [10] LIN T Y, LO C H. Unit root test against ESTAR with deterministic components[J]. Asia Pacific Management Review,2015,20(1):44.
- [11] KAPETANIOS G, SHIN Y. GLS detrending-based unit root tests in nonlinear STAR and SETAR models[J]. Economics Letters,2008,100(3):377.
- [12] KAPETANIOS G, SHIN Y, SNELL A. Testing for a unit root in the nonlinear STAR frameworks[J]. Journal of Econometrics,2003,112(2):363-364.
- [13] HANCK C. On the asymptotic distribution of a unit root test against ESTAR alternatives[J]. Statistics & Probability Letters,2012,82(2):362.
- [14] HANSEN B E. Convergence to stochastic integrals for dependent heterogeneous processes[J]. Econometric Theory, 1992,8(4):489.
- [15] MÜLLER U K, ELLIOTT G. Tests for unit roots and the initial condition[J]. Econometrica,2003(71):1269.
- [16] ENDERS W, LEE J. A unit root test using a Fourier series to approximate smooth breaks[J]. Oxford Bulletin of Economics and Statistics,2012,74(4):574.