浙江科技学院学报，第35卷第3期，2023年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.35 No.3，Jun. 2023

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2023.03.003

二邻近链环多项式的一个系数

陶志雄，殷炜栋
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：**【目的】**二分支链环 $L=L_1\cup L_2$ 称为二邻近于 $W=W_1\cup W_2$，假如存在 L 的两个交叉 c_1，c_2，则改变其中任何1个或同时改变它们2个都得到 W。$D=D(oc_1,oc_2)$是分别打开这两个交叉所得的链环。为了对链环进行二邻近分类，探讨了二邻近链环多项式的一个系数。**【方法】**利用文献[1]768-770中关于二邻近链环的结论，对实现链环的二邻近过程进行了仔细的分析，并讨论了各分支之间的链环数的相互关系，借此特别研究了 D 的Conway多项式 z^3 的系数 a_3[1]768的表达式。**【结果】**若两个交叉 c_1，c_2 在不同的分支上，则 $a_3(D)=\lambda^2\mathrm{lk}(L)$，$\lambda\in\mathbb{Z}$。**【结论】**不可能通过改变两个异号的交叉使得定向的 $L4a1$ 二邻近于定向的 $L9n10$。

关键词：链环；二邻近；链环不变量

中图分类号：O189.24　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2023)03-0209-04

A coefficient of 2-adjacent link polynomial

TAO Zhixiong，YIN Weidong
(School of Science，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，Zhejiang，China)

Abstract：[**Objective**] A two-branch link $L=L_1\cup L_2$ is said to be 2-adjacent to $W=W_1\cup W_2$. If there are two crossings c_1，c_2 of L，applying crossing change to either of them or both of them yields W，in which $D=D\ (oc_1,oc_2)$ denotes the link obtained by smoothing the two crossings. To investigate the 2-adjacent classification of the link，a coefficient of 2-adjacent link polynomial was researched. [**Method**] the conclusions in the reference [1]768-770 on the 2-adjacent link were made use of，elaborating on the 2-adjacent process to actualize the link and the relationship of the linking number among the branches，and attaching special attention to the expression of the coefficient a_3[1] 768 of D's Conway polynomial z^3. [**Result**] If two crossings c_1，c_2 are on different branches，then $a_3(D)=\lambda^2\mathrm{lk}(L)$，$\lambda\in\mathbb{Z}$. [**Conclusion**] The oriented link $L4a1$ is unlikely to be 2-adjacent to the oriented link $L9n10$ by changing two crossings with different signs on different branches.

Keywords：link；2-adjacent；link invariant

收稿日期：2021-12-21

基金项目：浙江省省级国际化线上线下混合式一流课程(浙教办函〔2021〕195号)

通信作者：殷炜栋(1980—　)，男，浙江省嘉兴人，讲师，博士，主要从事几何分析学研究及大学数学教学。E-mail：weidong.yin@zust.edu.cn。

二分支链环 $L=L_1\cup L_2$ 称为二邻近于 $W=W_1\cup W_2$，假如存在 L 的两个交叉 c_1,c_2，则改变其中任何1个或同时改变它们2个得到的都是 W[1]767。对于定向的链环也有相似定义，本文假设所考虑的链环是有定向的。记实现二邻近的交叉的符号分别是 α,β。$D=D(oc_1,oc_2)$ 是分别打开这两个交叉所得到的链环。进一步，根据二邻近的定义，以及文献[1]768的讨论可知，相关的2个交叉不可能是2个分支形成的交叉，不失一般性，假设改变 c_1 后 L_1 成为了 W_1，于是 $L_2=W_2$，$\mathrm{lk}(L)=\mathrm{lk}(W)$[1]769（下文中我们均使用这些假设）。二邻近链环的概念从提出到现在也有将近20年的时间了，但二邻近链环的研究成果并不是很多，足见其研究有一定的难度。目前主要的研究结果是由文献[1]768-775和文献[2-5]给出的，其中特别是文献[1]768-770的研究，给出了一些判别一般链环间的二邻近性的方法和结果。与本研究相关的结果，读者可以参考**命题1～5**。本研究旨在提供二邻近链环应该满足的一个新的关系式，以此也作为前述文章的一个补充。

我们有以下结果：

定理 如上假设，且实现二邻近的2个相关交叉 c_1,c_2 分别在 L 的不同分支上，则 $a_3(D)=\lambda^2\mathrm{lk}(L)$，$\lambda\in\mathbb{Z}$。其中 $a_3(D)$ 是 D 的 Conway 多项式中 z^3 的系数。

最后，将给出一个例子来说明这个**定理**的应用。这里假定读者已了解一些相关的基本知识，也可参考文献[6-7]。

1 基本知识

假如 $G=L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$ 是有4个分支的定向链环，记 $\mathrm{lk}(L_i,L_j)=l_{ij}$，$i\neq j$ 为2个不同分支之间的链环数，则 $\mathrm{lk}(G)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} l_{ij}$[1]768,[8]。

命题1[1]768,[9-10] 令 $a_3(G)$ 是链环 G 的 Conway 多项式 $\nabla(G)(\in\mathbb{Z}[z])$ 中 z^3 的系数，则

$$a_3(G)=-l_{12}l_{13}l_{14}-l_{12}l_{23}l_{14}-l_{13}l_{23}l_{14}-l_{12}l_{13}l_{24}-l_{13}l_{14}l_{24}-l_{12}l_{23}l_{24}-l_{13}l_{23}l_{24}-l_{14}l_{23}l_{24}-l_{12}l_{13}l_{34}-l_{12}l_{14}l_{34}-l_{12}l_{23}l_{34}-l_{13}l_{23}l_{34}-l_{14}l_{23}l_{34}-l_{12}l_{24}l_{34}-l_{13}l_{24}l_{34}-l_{14}l_{24}l_{34}。$$

命题2[1]768 如前假设，有

$$\nabla(L)=\alpha\beta z^2\ \nabla(D(oc_1,oc_2))+\nabla(W)。$$

命题3[1]770,[11] 记号和假设如前，又假设 $V(G;t)(\in\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}])$（简记为 $V(G)$）是链环 G 的 Jones 多项式，$c(G)$ 是它的分支数，则

1) $V'(G;1)=-3(-2)^{c(G)-2}\mathrm{lk}(G)$；

2) $V(D(oc_1,oc_2);t)=\alpha\beta t^{1-\alpha-\beta}(V(L;t)-(t^{2\alpha}+t^{2\beta}-t^{2(\alpha+\beta)})V(W;t))(1-t)^{-2}$。

命题4[1]769 记号和条件同上，$\mathrm{lk}(L)=\mathrm{lk}(W)\neq 0$，$a_3(L)=a_3(W)$，则 $D(oc_1,oc_2)$ 有4个分支。

命题5[1]770 记号和条件同上，若实现二邻近的2个交叉都在 L_1 上，且 $D(oc_1,oc_2)$ 有4个分支，则

$$\sqrt{|a_4(L_1)-a_4(W_1)|}=|\mathrm{lk}(D(oc_1,oc_2))-\mathrm{lk}(L)|，$$

且假如 L_2 与 $D(oc_1,oc_2)$ 的任一不同于 L_2 的分支的链环数都不为零，则 $a_3(D(oc_1,oc_2))$ 为 $(\mathrm{lk}(D(oc_1,oc_2))-2\mathrm{lk}(L))^2\mathrm{lk}(L)$；否则为 $|a_4(L_1)-a_4(W_1)|\mathrm{lk}(L)$。

2 定理的证明

如前假设，并假设交叉 c_1,c_2 分别在 L_1,L_2 上，L_1 打开 c_1 后使其成为链环 $oc_1=G_1\cup G_2$，L_2 打开 c_2 后使其成为链环 $oc_2=G_3\cup G_4$，$l_{jk}=\mathrm{lk}(G_j\cup G_k)$，于是 $a_2(L_1)-a_2(W_1)=\mathrm{lk}(oc_1)=l_{12}$。如果先改变 c_2，则有2种情形：

1) 如果 $L_2(=W_2)$ 变成 W_2，那么 $L_1=W_1$，$0=a_2(L_1)-a_2(W_1)=\mathrm{lk}(oc_1)=l_{12}$，$0=a_2(W_2)-a_2(W_2)=\mathrm{lk}(oc_2)=l_{34}$。

2) 如果 $L_2(=W_2)$ 变成 W_1，那么 $W_2=W_1$，$L_1=W_2$，即 $L_1=W_2=W_1$，也即 $0=a_2(W_2)-a_2(W_1)=\mathrm{lk}(oc_2)=l_{34}$，且 $0=a_2(L_1)-a_2(W_1)=\mathrm{lk}(oc_1)=l_{12}$。

所以无论哪一种情形，都有 $l_{12}=0=l_{34}$，故

$$\begin{cases}\mathrm{lk}(L)=\mathrm{lk}(W)=l_{13}+l_{14}+l_{23}+l_{24}, \\ \mathrm{lk}(D)=\mathrm{lk}(L)+l_{12}+l_{34}=\mathrm{lk}(L)。\end{cases}$$

因 L 二邻近于 W，所以

$$0=a_3(L)-a_3(W)=\alpha a_2(oc_1,c_2)=\alpha a_2(G_1\cup G_2\cup L_2)=\beta a_2(L_1\cup G_3\cup G_4),$$

即

$$\begin{cases}l_{12}\mathrm{lk}(G_1,L_2)+l_{12}\mathrm{lk}(G_2,L_2)+\mathrm{lk}(G_1,L_2)\mathrm{lk}(G_2,L_2)=0, \\ l_{34}\mathrm{lk}(G_3,L_1)+l_{34}\mathrm{lk}(G_4,L_1)+\mathrm{lk}(G_3,L_1)\mathrm{lk}(G_4,L_1)=0。\end{cases}$$

但 $\mathrm{lk}(G_1,L_2)=l_{13}+l_{14}$，$\mathrm{lk}(G_2,L_2)=l_{23}+l_{24}$，$l_{12}=0$，$\mathrm{lk}(G_1,L_2)+\mathrm{lk}(G_2,L_2)=\mathrm{lk}(L)$，$\mathrm{lk}(G_3,L_1)=l_{13}+l_{23}$，$\mathrm{lk}(G_4,L_1)=l_{14}+l_{24}$，$l_{34}=0$，$\mathrm{lk}(G_3,L_1)+\mathrm{lk}(G_4,L_1)=\mathrm{lk}(L)$，故

$$\begin{cases}(l_{13}+l_{14})(l_{23}+l_{24})=0, \\ (l_{13}+l_{23})(l_{14}+l_{24})=0。\end{cases} \tag{1}$$

也即

$$\mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{23},\ l_{14}=-l_{24}，\text{或 } \mathrm{lk}(L)=l_{14}+l_{24},\ l_{13}=-l_{23},$$

且

$$\mathrm{lk}(L)=l_{23}+l_{24},\ l_{13}=-l_{14}，\text{或 } \mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{14},\ l_{23}=-l_{24}。$$

综合得，若 L 的其中 1 个分支 A 的交叉被打开后得 2 个分支，则 $\mathrm{lk}(L)$ 就等于 A 的其中 1 个分支与 L 中的另 1 个分支 B 的链环数，而 A 的另 1 个分支与 L 的另 1 个分支 B 的链环数为零。

下面来计算 $a_3(D)$。

根据**命题 1**，因为 $l_{12}=l_{34}=0$，所以

$$a_3(D)=-l_{13}l_{23}l_{14}-l_{13}l_{14}l_{24}-l_{13}l_{23}l_{24}-l_{14}l_{23}l_{24}。$$

根据式(1)，只能有以下 4 种情形：

1) $\mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{23}$，$l_{14}=-l_{24}$，且 $\mathrm{lk}(L)=l_{23}+l_{24}$，$l_{13}=-l_{14}$，故

$$a_3(D)=l_{13}^2(l_{13}+l_{23})=l_{13}^2\mathrm{lk}(L);$$

2) $\mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{23}$，$l_{14}=-l_{24}$，且 $\mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{14}$，$l_{23}=-l_{24}$，故

$$a_3(D)=-l_{14}^2(l_{24}-l_{13})=l_{14}^2\mathrm{lk}(L);$$

3) $\mathrm{lk}(L)=l_{14}+l_{24}$，$l_{13}=-l_{23}$，且 $\mathrm{lk}(L)=l_{23}+l_{24}$，$l_{13}=-l_{14}$，故

$$a_3(D)=l_{13}^2(l_{24}-l_{13})=l_{13}^2\mathrm{lk}(L);$$

4) $\mathrm{lk}(L)=l_{14}+l_{24}$，$l_{13}=-l_{23}$，且 $\mathrm{lk}(L)=l_{13}+l_{14}$，$l_{23}=-l_{24}$，故

$$a_3(D)=l_{13}^2(l_{14}-l_{23})=l_{13}^2\mathrm{lk}(L)。$$

这样就完成了**定理**的证明。

3　例　子

例：若定向的链环 $L4a1$ 与 $L9n10$ 如图 1 所示，则不可能通过改变 2 个异号的交叉使得前者二邻近于后者。

因$\nabla(L4a1)=z^3+2z$，$\nabla(L9n10)=z^5+z^3+2z$，根据**命题 2**，D 的 Conway 多项式为$(\nabla(L4a1)-\nabla(L9n10))z^{-2}=-z^3$。由假设 $\alpha\beta=-1$，知 $a_3(D)=1$，而且由**命题 4** 得知 D 有 4 个分支。

图 1　$L4a1$ 和 $L9n10$

Fig. 1　$L4a1$ and $L9n10$

因 $V(L4a1)=-(1+t^2-t^3+t^4)t^{-3/2}$，且

$$V(L9n10)=-t^{-5/2}(-1+3t-4t^2+5t^3-5t^4+5t^5-3t^6+2t^7),$$

由**命题 3** 中的结论 2) 得，$V(D;t)=-t(V(L4a1)-(t^2+t^{-2}-1)V(L9n10))(1-t)^{-2})$，所以

$V'(D;1)=-24$。由**命题 3** 中的结论 1)得,$\mathrm{lk}(D)=2$。如果 c_1,c_2 是 $L4a1$ 的同一个分支的交叉,那么根据**命题 5**,$a_3(D)$应该等于$(\mathrm{lk}(D)-2\mathrm{lk}(L))^2\mathrm{lk}(L)=8$ 或者$|a_4(L_1)-a_4(W_1)|\mathrm{lk}(L)=0$。显然,这都是不可能的。因此,$c_1,c_2$ 分别在不同的分支上。于是,根据上面的结论,得到 $a_3(D)=2a^2,a\in\mathbb{Z}$,这也是不可能的,因为 $a_3(D)=1$。

综上,$L4a1$ 不可能通过改变 2 个异号的交叉来实现二邻近于 $L9n10$。

参考文献:

[1] TAO Z X. On 2-adjacency between links[J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B,2016,37B(5):767.

[2] TAO Z X. 2-Adjacency between pretzel links and the trivial link[J]. Topology and its Applications,2016,214:186.

[3] TAO Z X. 2-Adjacency between some special links and pretzel links[J]. Journal of Knot Theory and its Ramifications,2018,27(12):1850062-1.

[4] TORISU I. On 2-adjacency relation of two-bridge knots and links[J]. Journal of the Australian Mathematical Society,2008,84(1):139.

[5] TORISU I. On 2-adjacency relation of links[C]//Proceedings of the International Workshop on Knot Theory for Scientific Objects. Osaka: Osaka Municipal Universities Press,2007:277.

[6] KAUFFMAN L H. On knots[M]. Princeton: Princeton University Press,1987.

[7] KAWAUCHI A. A survey of knot theory[M]. Berlin: Birkhäuser,1996.

[8] LICKORISH W B R, MILLETT K C. A polynomial invariant of oriented links[J]. Topology,1987,26(1):107.

[9] HOSTE J. The first coefficient of the Conway polynomial[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1985,95(2):299.

[10] MASBAUM G, VAITROBW A. A new matrix tree theorem[EB/OL]. (2002-02-28)[2021-11-25]. https://arxiv.org/abs/math/0109104v2.

[11] LICKORISH W B R, MILLETT K C. Some evaluations of link polynomials[J]. Commentarii Mathematici Helvetici,1986,61:349.