浙江科技学院学报，第 19 卷第 3 期，2007 年 9 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 19 No. 3, Sep. 2007

具有(F,α,ρ,d)-凸的广义分式规划的鞍点最优性准则

程　丽，童子双
（金华职业技术学院 师范学院，浙江 金华 321017）

摘　要：对于一类目标函数中有无限个分式的广义分式规划，给出了两个不完全 Lagrange 函数，并利用已有的最优必要条件，在(F,α,ρ,d)-凸性的条件下，证明了鞍点最优性准则。

关键词：广义分式规划；不完全 Lagrange 函数；鞍点；(F,α,ρ,d)-凸性
中图分类号：O221.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2007)03-0178-04

Saddle-Point Type Optimality Criteria for Class of Generalized Fractional Programming with (F,α,ρ,d)-Convexity

CHENG Li, TONG Zi-shuang
(Normal School of Jinhua Profession and Technology College, Jinhua 321017, China)

Abstract: For a class of generalized fractional programming with infinite fractions in the objective function involving, two incomplete lagrange functions are given. The saddle-point type optimality criteria are also proven by using the existing necessary conditions under the assumption of the class of (F,α,ρ,d)-convexity.

Key words: generalized fractional programming; incomplete lagrange function; saddle-point; (F,α,ρ,d)-convexity

本文考虑如下的广义分式规划：

$$(P)\quad v^{*}=\min\max_{y\in Y}\frac{f(x,y)}{h(x,y)},$$
$$s.t.\ g(x)\leqslant 0$$

其中Y为$\boldsymbol{R}^m$中紧集，$f(\cdot,\cdot):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$是可微函数且$f(x,y)\geqslant 0$，$h(\cdot,\cdot):\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$是可微函数且$h(x,y)>0$，$g(\cdot):\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^p$是可微函数。文献[1,2]分别在不变凸性和$(F,\rho)$凸性的假设下，给出了规划$(P)$的最优性条件和对偶理论。文献[3]在$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性的条件下，给出了规划$(P)$的最优性充分条件和两个对偶模型，证明了其相应的对偶定理。文献[4]提出了不完全 Lagrange 函数，研究了目标函数中只有有限个分式的广义分式规划的鞍点存在性定理。文献[5]则在不变凸性的假设下，对规划(P)建立了一个不完全 Lagrange 函数，并获得规划(P)的鞍点最优性准则。

本文的目的是在(F,α,ρ,d)-凸性的条件下，对广义分式规划(P)给出两个不同于文献[5]的不完全 Lagrange 函数，并利用已有的最优性必要条件，证明其相应的鞍点最优性准则。

收稿日期：2007-03-15
作者简介：程　丽(1972—　)女，浙江永康人，讲师，硕士，主要从事最优化理论研究。

1　基本定义和预备知识

定义 1　设有函数 $F:X\times X\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$(其中 $X\subseteq R^n$),如果对任意 $x_1,x_2\in X$,有

$$F(x_1,x_2;\alpha_1+\alpha_2)\leqslant F(x_1,x_2;\alpha_1)+F(x_1,x_2;\alpha_2),\ \forall\,\alpha_1,\alpha_2\in \boldsymbol{R}^n$$
$$F(x_1,x_2;r\alpha)=rF(x_1,x_2;\alpha),\ \forall\, r\in \boldsymbol{R}_+,\alpha\in \boldsymbol{R}^n。\tag{1}$$

则称函数 $F:X\times X\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 是次线性的。

对于次线性函数 F,由式(1)可得

$$F(x_1,x_2;0)=0。\tag{2}$$

定义 2　设函数 $F:X\times X\times \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 是次线性的,函数 $f:X\to \boldsymbol{R}$ 在 $x_0\in X$ 处是可微的,若存在函数 $\alpha:X\times X\to \boldsymbol{R}_+\setminus\{0\},d:X\times X\to \boldsymbol{R}$ 以及实数 $\rho\in \boldsymbol{R}$,使得

$$f(x)-f(x_0)\geqslant F(x,x_0;\alpha(x,x_0)\ \nabla f(x_0))+\rho d^2(x,x_0),\ \forall\, x\in X$$

则称函数 f 在 x_0 处是(F,α,ρ,d)-凸的。如果函数 f 在 X 中每一点都是(F,α,ρ,d)-凸的,则称函数 f 在 X 上是(F,α,ρ,d)-凸的。

给出参数 v,规划(P)等价于下面的规划:

$$(P_v)\quad \varphi(v)=\min\max_{y\in Y}[f(x,y)-vh(x,y)]$$
$$s.t.\ g(x)\leqslant 0。$$

引理 1[6]　1) 若(P)有一个全局最优解 x^*,则 x^* 是(P_{v^*})的全局最优解且 $\varphi(v^*)=0$。

2) 若存在 $\bar v$ 使得$(P_{\bar v})$有一个全局最优解 $\bar x$ 且 $\varphi(\bar v)=0$,则 $\bar x$ 是(P)的一个全局最优解且 $\bar v=v^*$。

下面设

$$J=\{1,2,\cdots,p\},J(x)=\{j\in J\mid g_j(x)=0\};$$
$$Y(x)=\left\{y\in Y\left|\frac{f(x,y)}{h(x,y)}=\sup_{z\in Y}\frac{f(x,z)}{h(x,z)}\right.\right\};$$
$$K=\{(s,t,\bar y)\in N^*\times \boldsymbol{R}_+^s\times \boldsymbol{R}^{ms}\mid 1\leqslant s\leqslant n+1,$$
$$t=(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in \boldsymbol{R}_+^s,\bar y=(y_1,\cdots,y_s)\text{ 且 }\sum_{i=1}^s t_i=1,y_i\in Y(x),i=1,2,\cdots,s\}$$

文献[7]中,Chandra 和 Kumar 得到了关于规划(P)的如下一个一阶必要条件:

定理 1　(必要条件) 设 x^* 是(P)的最优解,$\nabla g_j(x^*),j\in J(x^*)$ 线性独立,那么存在$(s^*,t^*,\overline{y^*})\in K,v^*\in \boldsymbol{R},u^*\in \boldsymbol{R}_+^p$,使得

$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\{\nabla f(x^*,y_i^*)-v^*\ \nabla h(x^*,y_i^*)\}+\nabla\sum_{j=1}^p u_j^*g_j(x^*)=0,\tag{3}$$

$$f(x^*,y_i^*)-v^*h(x^*,y_i^*)=0,i=1,2,\cdots,s^*,\tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^p u_j^*g_j(x^*)=0,\tag{5}$$

$$u^*\in \boldsymbol{R}_+^p,t_i^*\geqslant 0,\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*=1,\quad y_i^*\in Y(x^*),i=1,2,\cdots,s^*。\tag{6}$$

2　鞍点最优性准则

记规划(P)的可行域为 S,设 M,N 为给定的,使得 $N\cup M=J$ 且 $M\cap N=\varnothing$。$|M|$ 和 $|N|$ 分别表示集合 M 和 N 的元素个数。

记 $X=\{x\in \boldsymbol{R}^n\mid g_j(x)\leqslant 0,j\in N\}$;

$$K=\{(s,t,\bar y)\in N^*\times \boldsymbol{R}_+^s\times \boldsymbol{R}^{ms}\mid 1\leqslant s\leqslant n+1,$$
$$t=(t_1,t_2,\cdots,t_s)\in \boldsymbol{R}_+^s,\bar y=(y_1,\cdots,y_s)\text{ 且 }\sum_{i=1}^s t_i=1,$$
$$y_i\in Y(x),i=1,2,\cdots,s\}。$$

取 $L_1:X\times \boldsymbol{R}_+^{|M|}\to \boldsymbol{R}$ 为规划(P)的不完全 Lagrange 函数,其中

$$L_1(x,u_M)=\max_{y\in Y}\{f(x,y)-v^*h(x,y)\}+\sum_{j\in M}u_jg_j(x)。$$

定义 3　设$(x^*,u_M^*)\in X\times \boldsymbol{R}_+^{|M|}$,若对任意 $x\in X,u_M\in \boldsymbol{R}_+^{|M|}$,使得 $L_1(x^*,u_M)\leqslant L_1(x^*,u_M^*)\leqslant L_1(x,u_M^*)$,则称点$(x^*,u_M^*)$为不完全 Lagrange 函数 L_1 的鞍点。

定理 2　(必要条件) 设 x^* 是(P)的最优解,$\nabla g_j(x^*),j\in J(x^*)$ 线性独立,且对 x^* 所确定的$(v^*,u^*,s^*,t^*,\overline{y^*})$和设 $u^*=(u_M^*,u_N^*)^{\mathrm T}$,若下列条件成立

(ⅰ) $f(\cdot,y_i^*)$ 在 x^* 处是(F,α,ρ_i,d_i)-凸的,$i=1,2,\cdots,s^*$;

(ⅱ) $-h(\cdot,y_i^*)$ 在 x^* 处是$(F,\alpha,\overline{\rho_i},\overline{d_i})$-凸的,$i=1,2,\cdots,s^*$;

(ⅲ) $g_j(x)(j=1,2,\cdots,p)$ 在 x^* 处是(F,α,ξ_j,c_j)-凸的;

(ⅳ) $\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[\rho_id_i^2(x,x^*)+v^*\ \overline{\rho_i}\,\overline{d_i}^2(x,x^*)]+\sum_{j=1}^p u_j^*\xi_jc_j^2(x,x^*)\geqslant 0$。

则(x^*,u_M^*)是不完全 Lagrange 函数 L_1 的鞍点。

证明　由定理 1 知式(3)和式(6)成立。

因 x^* 是最优解和 $u^*=(u_M^*,u_N^*)^{\mathrm T}$,于是有 $\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x^*)=0$,且 $x^*\in S$ 得,对 $\forall\,u_M\in \boldsymbol{R}_+^{|M|}$,

$\sum_{j\in M}u_j g_j(x^*)\leqslant 0$。所以

$$\max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]+\sum_{j\in M}u_j^* g_j(x^*)\geqslant$$
$$\max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]+\sum_{j\in M}u_j g_j(x^*)。$$

即 $$L_1(x^*,u_M)\leqslant L_1(x^*,u_M^*)。\tag{7}$$

又由条件(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)得

$$f(x,y_i^*)-f(x^*,y_i^*)\geqslant$$
$$F(x,x^*;\alpha(x,x^*)\nabla f(x^*,y_i^*))+\rho_i d_i^2(x,x^*),$$
$$i=1,2,\cdots,s^*,\tag{8}$$
$$-h(x,y_i^*)+h(x^*,y_i^*)\geqslant$$
$$F(x,x^*;-\alpha(x,x^*)\nabla h(x^*,y_i^*))+\overline{\rho_i}\,\overline{d_i}^2(x,x^*),$$
$$i=1,2,\cdots,s^*,\tag{9}$$
$$g_j(x)-g_j(x^*)\geqslant$$
$$F(x,x^*;\alpha(x,x^*)\nabla g_j(x^*))+\xi_j c_j^2(x,x^*),$$
$$j=1,2,\cdots,p。\tag{10}$$

把(8)和(9)中的式子两边分别乘以 t_i^* 再相加，(10)中的式子两边分别乘以 u_j^* 再相加，则由 F 的次线性性，可得

$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-f(x^*,y_i^*)]\geqslant$$
$$F\Big(x,x^*;\alpha(x,x^*)\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\nabla f(x^*,y_i^*)\Big)+$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\rho_i d_i^2(x,x^*),\tag{11}$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[-h(x,y_i^*)+h(x^*,y_i^*)]\geqslant$$
$$F\Big(x,x^*;-\alpha(x,x^*)\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\nabla h(x^*,y_i^*)\Big)+$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\overline{\rho_i}\,\overline{d_i}^2(x,x^*),\tag{12}$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*[g_j(x)-g_j(x^*)]\geqslant$$
$$F\Big(x,x^*;\alpha(x,x^*)\sum_{j=1}^{p}u_j^*\nabla g_j(x^*)\Big)+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*\xi_j c_j^2(x,x^*)。\tag{13}$$

因 $v^*\geqslant 0$，式(12)两边分别乘以 v^*，再把它与式(11)和式(13)相加，由 F 的次线性性，则有

$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-f(x^*,y_i^*)]+$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*v^*[-h(x,y_i^*)+h(x^*,y_i^*)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*[g_j(x)-g_j(x^*)]\geqslant$$
$$F\Big(x,x^*;\alpha(x,x^*)\Big[\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\nabla f(x^*,y_i^*)-$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*v^*\nabla h(x^*,y_i^*)+\sum_{j=1}^{p}u_j^*\nabla g_j(x^*)\Big]\Big)+$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\rho_i d_i^2(x,x^*)+\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*v^*\overline{\rho_i}\,\overline{d_i}^2(x,x^*)+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*\xi_j^2 c_j^2(x,x^*)。$$

而由式(2)和式(3)知

$$F\Big(x,x^*;\alpha(x,x^*)\Big[\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*\nabla f(x^*,y_i^*)-$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*v^*\nabla h(x^*,y_i^*)+\sum_{j=1}^{p}u_j^*\nabla g_j(x^*)\Big]\Big)=0。$$

因此，再由条件(ⅳ)和式(4)和式(5)可知

$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-f(x^*,y_i^*)]+$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*v^*[-h(x,y_i^*)+h(x^*,y_i^*)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*[g_j(x)-g_j(x^*)]=$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-v^*h(x,y_i^*)]-$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x^*,y_i^*)-v^*h(x^*,y_i^*)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*g_j(x)=\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-v^*h(x,y_i^*)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*g_j(x)\geqslant 0。$$

于是对任意 $x\in X$，结合上式有

$$L_1(x,u_M^*)=\max_{y\in Y}[f(x,y)-v^*h(x,y)]+$$
$$\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x)=\max_{y\in Y}[f(x,y)-v^*h(x,y)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*g_j(x)-\sum_{j\in N}u_j^*g_j(x)\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{s^*}t_i^*[f(x,y_i^*)-v^*h(x,y_i^*)]+$$
$$\sum_{j=1}^{p}u_j^*g_j(x)-\sum_{j\in N}u_j^*g_j(x)\geqslant$$
$$0-\sum_{j\in N}u_j^*g_j(x)\geqslant 0=$$
$$\max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]+$$
$$\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x^*)=L_1(x^*,u_M^*)。$$

于是结合式(7)有 $L_1(x^*,u_M)\leqslant L_1(x^*,u_M^*)\leqslant L_1(x,u_M^*)$，即 (x^*,u_M^*) 是不完全 Lagrange 函数 L_1 的鞍点。

定理 3 (充分条件) 设(x^*,u_M^*)为不完全 Lagrange 函数 L_1 的鞍点，那么$\sum_{j\in M}u_j^* g_j(x^*)=0$，且$x^*$为$(P)$的最优解。

证明　此定理的证明类似于文献[8]的证明，故略。

注意到，问题(P)等价于如下的问题：

$$(EP)\quad v^*=\min\max_{y\in Y}\frac{f(x,y)}{h(x,y)},$$

$$s.t.\ \max_{y\in Y}\frac{g_j(x)}{h(x,y)}\leqslant 0, j\in M$$

$$g_j(x)\leqslant 0, j\in N。$$

于是对应于问题(P)的不完全 Lagrange 函数$L_2(x,u_M):X\times \boldsymbol{R}_+^{|M|}\to \boldsymbol{R}$，定义为

$$L_2(x,u_M)=\max_{y\in Y}\frac{f(x,y)}{h(x,y)}+\sum_{j\in M}u_j\max_{y\in Y}\frac{g_j(x)}{h(x,y)}。$$

这里若$M=J$，则$L_2(x,u_M)$为 Xu 在文献[9]中所定义的 Lagrange 函数。

定义 4　设$(x^*,u_M^*)\in X\times \boldsymbol{R}_+^{|M|}$，若对任意$x\in X$，$u_M\in \boldsymbol{R}_+^{|M|}$，使得$L_2(x^*,u_M)\leqslant L_2(x^*,u_M^*)\leqslant L_2(x,u_M^*)$，则称点$(x^*,u_M^*)$为不完全 Lagrange 函数 L_2 的鞍点。

定理 4 (必要条件) 设x^*是(P)的最优解，$\nabla g_j(x^*), j\in J(x^*)$线性独立，且对$x^*$所确定的$(v^*,u^*,s^*,t^*,\overline{y^*})$和设$u^*=(u_M^*,u_N^*)^{\mathrm{T}}$，若定理 2 条件成立，则$(x^*,u_M^*)$是不完全 Lagrange 函数 L_2 的鞍点。

证明　由定理 2 知对任意$x\in X, w_M\in \boldsymbol{R}_+^{|M|}$，有

$$L_1(x^*,w_M)\leqslant L_1(x^*,u_M^*)\leqslant L_1(x,u_M^*)。\quad (14)$$

由引理 1 知　$\max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]=0\Leftrightarrow$

$$v^*=\max_{y\in Y}\frac{f(x^*,y)}{h(x^*,y)},$$

结合式(5)就有$0=\max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]+\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x^*)=\max_{y\in Y}\frac{f(x^*,y)}{h(x^*,y)}-v^*+\sum_{j\in M}u_j^*\max_{y\in Y}\frac{g_j(x^*)}{h(x^*,y)}=L_2(x^*,u_M^*)-v^*$。

现令$u_j=\dfrac{w_j}{\max_{y\in Y}\dfrac{1}{h(x^*,y)}}, j\in M$，则$u_M$是任意的当且仅当$w_M$是任意的，故对于式(14)中的第一个不等式，有

$$0\geqslant \max_{y\in Y}[f(x^*,y)-v^*h(x^*,y)]+\sum_{j\in M}w_jg_j(x^*)=\max_{y\in Y}\frac{f(x^*,y)}{h(x^*,y)}-v^*+\sum_{j\in M}u_j\max_{y\in Y}\frac{g_j(x^*)}{h(x^*,y)}=L_2(x^*,u_M)-v^*, \forall u_M\in \boldsymbol{R}_+^{|M|}。$$

又对一些固定的$x\in X$，$\exists y_i(x)\in Y$，使得

$$f(x,y_i)-v^*h(x,y_i)=\max_{y\in Y}[f(x,y)-v^*h(x,y)],$$

由式(14)的第二个不等式有

$$0\leqslant\frac{\left[\max_{y\in Y}[f(x,y)-v^*h(x,y)]+\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x)\right]}{h(x,y_i)}=\frac{f(x,y_i)}{h(x,y_i)}-v^*+\sum_{j\in M}u_j^*\frac{g_j(x)}{h(x,y_i)}\leqslant \max_{y\in Y}\frac{f(x,y)}{h(x,y)}-v^*+\sum_{j\in M}u_j^*\max_{y\in Y}\frac{g_j(x)}{h(x,y)}=L_2(x,u_M^*)-v^*, \forall x\in X。$$

所以$L_2(x^*,u_M)\leqslant L_2(x^*,u_M^*)\leqslant L_2(x,u_M^*)$，即$(x^*,u_M^*)$是不完全 Lagrange 函数 L_2 的鞍点。

定理 5　设(x^*,u_M^*)为不完全 Lagrange 函数 L_2 的鞍点，那么$\sum_{j\in M}u_j^*g_j(x^*)=0$，且$x^*$为$(P)$的最优解。

证明　此定理的证明类似于定理 3 的证明，故略。

参考文献：

[1] LIU J C, WU C S. On minimax fractional optimality conditions with invexity[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 1998, 219(1): 21-35.

[2] LIU J C, WU C S. On minimax fractional optimality conditions with (F,ρ)-convexity[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 1998, 219(1): 37-50.

[3] LIANG Zhi-an, SHI Zhen-wei. Optimality conditions and duality for a minimax fractional programming with generalized convexity[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 2003, 277(2): 474-488.

[4] BECTOR C R, CHANDRA S, ABHA. On Incomplete Lagrange Function and Saddle Point Optimality Criteria in Mathematical Programming[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications, 2000, 251: 2-12.

[5] 王兴国. 广义分式规划的鞍点最优性准则[J]. 浙江师范大学学报：自然科学版, 2004, 27(1): 6-10.

[6] 周少甫, 陈振龙, 方红兵. 广义分式规划的 Dinkelbach 型算法[J]. 荆州师专学报：自然科学版, 1997, 20(2): 4-7.

[7] CHANDRA S, KUMAR V. Duality in fractional minimax programming[J]. Austral Math Soc Ser A, 1995, 58: 376-386.

[8] BECTOR C R. Duality in nonlinear fractional programming[J]. Z Operation Research, 1973, 17: 183-193.

[9] XU Z K. Saddle-Point Type Optimality Criteria for Generalized Fractional Programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, 57(1): 190-195.