浙江科技学院学报,第22卷第6期,2010年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.22 No.6, Dec. 2010

DOI:10.3969/j.issn.1671-8798.2010.06.001

C^2 区域上薛定谔方程解的二阶导数的估计

韩 斌[1],陶祥兴[2]
(1.宁波大学 理学院,浙江 宁波 315211;2.浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 主要研究了 C^2 区域上薛定谔方程解的一些性质。对于$\frac{n}{(n+1)}<p\leqslant 1$,$H_{at}^p(\Omega)$ 是 C^2 区域 Ω 上的 Hardy空间,f 是 $H_{at}^p(\Omega)$ 上的一个分布。$V(x)$ 是薛定谔方程 $-\mathrm{div}(A\nabla u)+Vu=f$ 的非负位势满足反 Hölder 条件 B_n,若对 $x\in\Omega$,弱解 u 满足 $-\mathrm{div}(A\nabla u)+Vu=f$,并且它在边界 $\partial\Omega$ 的迹 $\gamma u=0$,得到了 u 的二阶导数的 L^p 的可积性。

关键词: Dirichlet 问题;薛定谔方程;Sobolev 空间;C^2 区域;B_n 条件;H^p 空间

中图分类号: O175.2　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1671-8798(2010)06-0485-09

On second order derivative estimates for Schrödinger equation in C^2 domains

HAN Bin[1], TAO Xiang-xing[2]
(1. Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;
2. School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper is devoted to research some properties of the solution of Schrödinger equation in C^2 domains. $H_{at}^p(\Omega)$ is the distribution of Hardy space on Ω for $\frac{n}{n+1}<p\leqslant 1$. Given $f\in H_{at}^p(\Omega)$, V is a singular non-negative potential of the Schrödinger equation $-\mathrm{div}(A\nabla u)+Vu=f$ satisfying reverse Hölder condition B_n. If u is the weak solution of the Schrödinger equation $-\mathrm{div}(A\nabla u)+Vu=f$ in Ω such that the trace $\gamma u=0$ on the boundary $\partial\Omega$, the L^p integrability of the second order derivative of u will be shown in this article.

Key words: Dirichlet problem; Schrödinger equation; Sobolev space; C^2 domains; B_n condition; H^p space

---

收稿日期: 2010-04-01
基金项目: 国家自然科学基金项目(10771110);宁波市自然科学基金项目(2006A610090)
作者简介: 韩 斌(1984—),男,江西玉山人,硕士研究生,研究方向为基础数学偏微分方程。
通讯作者: 陶祥兴,教授,主要从事调和分析与偏微分方程研究。

1 引 言

对 $x \in \Omega$,定义薛定谔算子 $Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + Vu$,$\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^2 区域。这里说的 C^2 区域指的是边界 $\partial\Omega$ 可用一些 C^2 的函数表示。在任意的球 B 上,位势 $V(x)$ 满足如下的反 Hölder 条件 B_n

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(x)^n \mathrm{d}x\right)^{1/n} \leqslant \frac{C_n}{|B|}\int_B V(x)\mathrm{d}x。$$

一般地,常常假设 $A(x) = (a^{ij}(x))$ 是实的对称矩阵,满足一致椭圆条件:

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda|\xi|^2,任意\ x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n。$$

其中常数 $\lambda > 1$,并且对任意的 $x, y \in \Omega$,存在正常数 l,使得

$$|a^{ij}(x) - a^{ij}(y)| \leqslant l|x - y|。$$

在本文,主要考虑薛定谔方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = f & x \in \Omega \\ \gamma u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 γ 是在 Ω 边界上的迹算子。笔者将在文中的定理给出:若对 $n/(n+1) < p \leqslant 1$,f 是 $H_{at}^p(\Omega)$ 上的一个分布,则在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中 Dirichlet 问题(1) 存在唯一的弱解,而且解的二阶导数 $\nabla^2 u \in L^p(\Omega)$。

国内外的科学家们在过去的几十年对这类问题作了一系列的讨论。1964 年,Kadlec 在文献[1] 中指出,如果 Ω 是有界凸区域且 $f \in L^2(\Omega)$,则 Possion 方程 $-\Delta u = f$ 的 Dirichlet 问题解 u 的二阶导数 $\nabla^2 u \in L^2(\Omega)$。后来在 1993 年,Adolfsson[2] 把 Kadlec 的结论推广到对任意的 $f \in L^p(\Omega)$,$\nabla^2 u \in L^p(\Omega)$,其中 $1 < p \leqslant 2$。在本文中,笔者不仅要把这些结论应用到所讨论的更为一般的薛定谔方程,还要考虑当 $0 < p \leqslant 1$,f 在 Hardy 空间 $H_{at}^p(\Omega)$ 时解的可积性。在区域 Ω 上 Hardy 空间,$H^p(\Omega)$ 定义如下:

$$H^p(\Omega) = \{f \in S'(\Omega):存在\ F \in H^p(\mathbb{R}^n),使得\ F|_\Omega = f\},$$

其中 $S(\Omega)$ 是区域 Ω 上的许瓦兹函数类,所定义的 Hardy 空间是在全空间上的,那么对于区域上的 Hardy 空间怎么定义呢?这里将要用到原子分解技术。

定义 1.1[3] 假设 $0 < p \leqslant 1$,$a(x)$ 是一个有界可测函数。如果下列的条件一和条件二成立,称 $a(x)$ 是 p- 原子;如果条件一和条件三成立,称 $a(x)$ 是局部 p- 原子;如果条件一和条件四成立,称 $a(x)$ 是(p, Ω)- 原子。

条件一:存在一个方体 Q 满足 $\operatorname{supp} a(x) \subset Q$ 和 $\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant |Q|^{1/2-1/p}$;

条件二:对任意的 $\beta \leqslant [n/p - n]$,$\int x^\beta a(x)\mathrm{d}x = 0$;

条件三:方体 Q 的边长,$l(Q) \geqslant 1$,或当 $l(Q) < 1$ 时条件二成立;

条件四:$Q \subset \Omega$ 且 $\operatorname{diam}(Q) \leqslant \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) \leqslant 4\operatorname{diam}(Q)$。

具体到本文中,只考虑 $H^p(\Omega) = H_{at}^p(\Omega)$ 的情形,因为对任意的 $f \in H_{at}^p(\Omega)$,文献[3] 的作者证明了如果 Ω 是有界连通的 Lipschitz 区域或是 Lipschitz 上方图,f 存在如下的原子分解:

$$f = \sum_k \lambda_k a_k,$$

其中$\{a_k(x)\}$ 是一列 p- 原子,它们的支集 Q_k 包含在 Ω 中,可以注意到这里定义的 $H_{at}^p(\Omega)$ 就是文献[3] 中所定义的 $H_z^p(\Omega)$。因为对任意的 C^2 区域是 Lipschitz 区域,文献[3] 中的结论在本文中也成立。

应用 Lax-Milgram 定理,对任意 $f \in L^2(\Omega)$,Dirichlet 问题(1) 有唯一的可解性(见第二部分定理 2.5),因此对任意的原子 $a(x)$,Dirichlet 问题(1) 唯一可解。由于涉及方程的弱解,有必要定义 $H_{at}^p(\Omega)$ 对偶空间,它就是以 $\alpha(p) = n(1-p)/p$ 为指标的 Hölder 连续函数空间 $C^{\alpha(p)}(\Omega)$,其中 $n/n+1 < p < 1$。现在能下定义了,对任意的试验函数 $\psi(x) \in C^{\alpha(p)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$,如果 $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\nabla\psi(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\psi(x)\mathrm{d}x,$$

就说在 H^p 意义下 u 是 Dirichlet 问题(1) 的解。

本文的主要结论是:

定理 1.2　R^n 中的开区域 Ω 是 C^2 区域,位势 $V(x)\in B_n$。若 $f\in H_{at}^p(\Omega)$ 且对任意的 $n/(n+1)<p<1$,$m(V,x)f\in H_{at}^p(\Omega)$,$m(V,x)$ 将在第二部分定义。则 Dirichlet 问题(1) 存在唯一解 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$。而且估计式

$$\|\nabla^2 u\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{H_{at}^p(\Omega)},$$

其中常数 C 不依赖 f。

笔者将在第二部分给出算子 L 的 Green 函数的一些性质,第三部分证明 Dirichlet 问题(1) 的 L^2 估计,并且给出主要结论的证明。在没有特别声明的情况下,常数 C 并不是固定的,它只是表示非无穷大的数,其所依赖的主要是 n,l 及 B_n 条件下的常数 C_n。

2　重要的引理和 Green 函数的估计

在此,笔者将会指出当 $f\in L^2(\Omega)$ 时,带奇异位势的薛定谔方程 $Lu=f$ 在 C^2 区域上存在解属于 $W_0^{1,2}(\Omega)$,然后给出对于薛定谔算子的 Green 函数的估计。为此,需要利用关于位势 V 辅助函数的一些性质。对 $q\geqslant n/2$,假设 $V\in B_q$,用

$$\frac{1}{m(V,x)}=\sup_{r>0}\left\{r:\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(x,r)}V(y)\mathrm{d}y\leqslant 1\right\},$$

来定义辅助函数 $m(V,x)$。显而易见,$0<m(V,x)<\infty$。例如,假设 $V(x)=|P(x)|$ 且 $P(x)$ 是个 k 次多项式,则

$$m(V,x)\simeq\sum_{|\beta|\leqslant k}|\partial_x^\beta P(x)|^{1/(|\beta|+2)}。$$

引理 2.1[4-5]　对 $q\geqslant n/2$,假设 $V\in B_q$,则存在常数 $C>0$,$c>0$ 及 $k_0>0$ 使得对任意 $x,y\in R^n$,有

1) 若 $|x-y|\leqslant\dfrac{1}{m(V,x)}$,$m(V,x)\sim m(V,y)$;

2) $m(V,y)\leqslant C\{1+|x-y|m(V,x)\}^{k_0}m(V,x)$;

3) $m(V,y)\geqslant\dfrac{cm(V,x)}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^{k_0/(k_0+1)}}$;

4) $c\{1+|x-y|m(V,x)\}^{1/(k_0+1)}\leqslant 1+|x-y|m(V,y)\leqslant C\{1+|x-y|m(V,x)\}^{k_0+1}$。

在文献[4]中,引理 2.1 的 1),2),3) 已经证明,而 4) 的估计可由 2),3) 推导出来。

引理 2.2[6]　假设 $q>s\geqslant 0$,$q\geqslant\max\{n/2,sn/\alpha\}$,$\alpha>0$,以及 k 充分大,则存在正常数 k_0,C 和 C_k 使得

$$\int_{|x-y|<r}\frac{V(y)^s}{|x-y|^{n-\alpha}}\mathrm{d}Y\leqslant Cr^{\alpha-2s}\{1+rm(V,x)\}^{sk_0},$$

以及

$$\int_{R^n}\frac{V(y)^s\mathrm{d}Y}{\{1+m(V,x)|x-y|\}^k|x-y|^{n-\alpha}}\leqslant C_k m(V,x)^{2s-\alpha},$$

对任意的 $r>0$,$x\in\mathbb{R}^n$ 和 $V\in B_q$ 成立。

引理 2.3[7]　对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$,设 $\Gamma(x,y)$ 是薛定谔方程 $Lu=0$ 的基本解。对任意的 $k>0$,有

1) 若 $V\in B_{n/2}$,则存在常数 C_k,使得对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$0\leqslant\Gamma(x,y)\leqslant\frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k|x-y|^{n-2}}$$

成立;

2) 若 $V\in B_n$,同时假设 $a^{ij}(x)$ 满足 $\|a^{ij}(x)\|_{C^\alpha(R^n)}\leqslant C_1$,其中常数 $C_1>0$ 且 $\alpha\in(0,1]$,则存在常数 C_k,使得对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$|\nabla_x\Gamma(x,y)|\leqslant\frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k|x-y|^{n-1}}$$

成立。

引理 2.4[8] 对于 $q \geqslant n/2$，设 $V(x) \in B_q$。则

$$\int_\Omega |u(x)|^2 m(V,x)^2 \mathrm{d}x \leqslant C\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2 V(x)\mathrm{d}x\right\},$$

以及

$$\int_\Omega |u(x)|^2 V(x)\mathrm{d}x \leqslant C\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2 m(V,x)^2 \mathrm{d}x\right\},$$

其中常数 $C = C(n,\lambda,K_q)$。

假设 $H(\Omega)$ 表示 $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 中的函数类，满足

$$\|u\|_{H(\Omega)} =: \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega m(V,x)^2 |u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} < \infty。$$

则 $H(\Omega)$ 为 Hilbert 空间，并且 $C_0^1(\Omega)$ 在 $H(\Omega)$ 中稠密。如果令

$$a(u,v) = \int_\Omega A(x)\nabla u \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega Vuv\mathrm{d}x,$$

从文章开始假设的椭圆条件和引理 2.3 能够得知，对所有的 $u,v \in H(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leqslant C\|u\|_{H(\Omega)}\|v\|_{H(\Omega)}, \tag{2}$$

以及对不依赖于 u 的常数 δ

$$\begin{aligned} a(u,u) \geqslant{}& \lambda^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2 V(x)\mathrm{d}x \geqslant \\ & \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + C_\lambda\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2 V(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \\ & \delta\|u\|_{H(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

成立。所以，$a(u,v)$ 是 Hilbert 空间 $H(\Omega)$ 上的一个有界强制的双线性泛函。另一方面，对于 $f_1 \in L^2(\Omega)$ 及 $m(V,\cdot)^{-1}f_2 \in L^2(\Omega)$，设 $F(v) = \int_\Omega (f_1(x) + f_2(x))v(x)\mathrm{d}x$，其中 $v \in H(\Omega)$，由 Hölder 不等式和式(2) 知 $F \in H^*(\Omega)$，为此应用 Lax-Milgram 定理可以得到 Dirichlet 问题(1) 的 L^2 可解性。

定理 2.5 假设 Ω 是 R^n 中的有界开区域，当 $q \geqslant n/2$ 时，$V \in B_q$。若 $f_1 \in L^2(\Omega)$ 且 $m(V,\cdot)^{-1}f_2 \in L^2(\Omega)$，则对任意的 $x \in \Omega$，薛定谔方程 $Lu = f_1 + f_2$ 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 存在唯一的解 u，并且

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)|u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant C|\Omega|^{2/n}\int_\Omega |f_1(x)|^2 \mathrm{d}x + C\int_\Omega m(V,x)^{-2}|f_2(x)|^2 \mathrm{d}x,$$

其中常数 $C = C(n,\lambda,K_q)$。

注 2.6 回顾以上的讨论，可以注意到如果 $f_1 = 0$，则定理 2.5 的结论对任意的无界区域 Ω 仍然成立。

对于 Dirichlet 问题，由双层位势理论[9] 可知，薛定谔方程 $Lu = 0$ 存在 $G(x,y)$。因为 $V \geqslant 0$，所以

$$0 \leqslant G(x,y) \leqslant \frac{C}{|x-y|^{n-2}},$$

其中常数 $C > 0$ 及 $x,y \in \Omega$。而且利用文献[6] 中的引理 2.7 或文献[8] 中的引理 1.21，能够得到下面关于 Green 函数的估计，这里略去了证明。

引理 2.7 假设 k 是非负的整数，则对任意的 $x,y \in \Omega$ 有

$$|G(x,y)| \leqslant \frac{C_k}{\{1+|x-y|m(x,V)\}^k}\frac{1}{|x-y|^{n-2}},$$

其中 $C_k > 0$。

推论 2.8 假设 k 是非负的整数，则对任意的 $x,y \in \Omega$ 有

$$|G(x,y)| \leqslant \frac{C_k}{\{1+|x-y|m(x_0,V)\}^k}\frac{\delta(x)}{|x-y|^{n-1}},$$

其中 $C_k > 0$。

证明 利用引理 2.7 的估计，类似于文献[10] 中定理 3.2 和定理 3.3 的方法直接推出推论中的估计。

为了得到 Green 函数 $G(x,y)$ 一阶导数的估计，需要如下的引理：

引理 2.9　假设 $V \in B_n$，若 $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(B(x_0,r))$ 在 $B(x_0,r)$ 上满足方程 $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) + V(x)u(x) = 0$，则存在两个正的常数 C 和 k_0 使得

$$|\nabla u(x_0)| \leqslant C\frac{\{1+rm(x_0,V)\}^{k_0}}{r}\sup_{x\in B(x_0,r)}|u(x)|。$$

证明　将截断函数 $\phi \in C_0^\infty(B(x_0,r))$ 作为试验函数代入方程，有

$$\int A[\nabla w\nabla(w\phi^2) + Vw^2\phi^2]\mathrm{d}x = 0,$$

或者是

$$\int A[\nabla(w\phi)\nabla(w\phi) + Vw^2\phi^2]\mathrm{d}x = \int A\nabla\phi\nabla\phi w^2\mathrm{d}x,$$

从而得到下面的 Caccioppoli 不等式

$$\int_{B(x_0,r_1)}[|\nabla w|^2 + V|w|^2]\mathrm{d}x \leqslant \frac{C\lambda^2}{(r_2-r_1)^2}\int_{B(x_0,r_2)}|w|^2\mathrm{d}x, \tag{3}$$

其中常数 $0\leqslant r_1 < r_2 \leqslant r$，$C$ 不依赖于 r_1 和 r_2。

注意到

$$-\operatorname{div}(A\nabla(w\phi)) + Vw\phi = -2A\nabla w\nabla\phi - \operatorname{div}(A\nabla\phi)w,$$

假设截断函数 $\phi \in C_0^\infty(B(x_0,r/2))$ 使得在上 $B(x_0,r/3)$，$\phi\equiv 1$ 且 $|\nabla\phi|\leqslant 1/r$ 则

$$\nabla w(x_0) = \int\nabla_x\Gamma(x_0,y)[-2A(y)\nabla w(y)\nabla\phi(y) - \operatorname{div}(A(y)\nabla\phi(y))w(y)]\mathrm{d}y。$$

由此，联系引理 2.2 和 Caccioppoli 不等式(3)，就得到了引理的估计。

引理 2.10　假设 $V\in B_n$，k 为非负的整数，对任意 $x,y\in\Omega$，则

$$|\nabla_x G(x,y)| \leqslant \frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k}\frac{1}{|x-y|^{n-1}},$$

其中 $C_k > 0$。

证明　对任意的 $x,y\in\Omega$，令 $r=|x-y|$，且记 $\delta(x)=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$。

1) 若 $\delta(x) > r/2$，则 $B(x,r/2)\subset\Omega$。注意到对固定的 x，在 $B(x,r/2)$，$G^y = G(\cdot,y)$ 满足 $LG^y=0$。由引理 2.9 和定理 2.7，得到

$$\begin{aligned}|\nabla G^y(x)| &\leqslant \frac{C}{r}\sup_{z\in B\left(x,\frac{r}{2}\right)}|G(z,y)| \leqslant \\ &\frac{C}{r}\sup_{z\in B\left(x,\frac{r}{2}\right)}\frac{C_k}{\{1+|z-y|m(V,z)\}^k}\frac{1}{|z-y|^{n-2}} \leqslant \\ &\frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}。\end{aligned}$$

2) 若 $\delta(x)\leqslant r/2$，注意到对固定的 x，在 $B(x,\delta(x)/2)$，$G^y = G(\cdot,y)$ 满足 $LG^y=0$。因此引理 2.9 隐含着

$$|\nabla G^y(x)| \leqslant \frac{C}{\delta(x)}\sup_{z\in B\left(x,\frac{\delta(x)}{2}\right)}|G(z,y)|。$$

选择点 $z^*\in B\left(x,\frac{\delta(x)}{2}\right)$使得

$$|G(z^*,y)| = \sup_{z\in B\left(x,\frac{\delta(x)}{2}\right)}|G(z,y)|,$$

和点 $x^*\in\partial\Omega$ 满足 $\delta(x)=|x-x^*|$。通过直接的计算得到

$$\delta(z^*)\leqslant|z^*-x^*|\leqslant\frac{3\delta(x)}{2}，且 |z^*-y|\sim|x-y|\geqslant 2\delta(x)。$$

由此联系推论 2.8 就能得到

$$|\nabla G^y(x)| \leqslant \frac{C}{\delta(x)} \frac{C_k}{\{1+|z^*-y|m(V,z^*)\}^k} \frac{\delta(z^*)}{|z^*-y|^{n-1}} \leqslant$$
$$\frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k} \frac{1}{|x-y|^{n-1}},$$

其中最后一个不等式中利用了引理 2.1。至此就完成了引理的证明。

因为对固定 $x\in\Omega$，在 $\Omega\backslash\{x\}$ 中，$\nabla_x G(x,\cdot)$ 是方程 $Lu=0$ 的解，再次利用引理 2.9 和定理 2.10 就得到了：

推论 2.11 k 为非负的整数。对任意 $x,y\in\Omega$，则

$$|\nabla_y \nabla_x G(x,y)| \leqslant \frac{C_k}{\{1+|x-y|m(V,x)\}^k} \frac{1}{|x-y|^n},$$

其中 $C_k>0$。

3 解的二阶导数的估计

在此，主要致力于在 C^2 区域 Ω 上讨论薛定谔方程的可解性，即定理 1.2 的证明。在偏微分方程中，解弱的或经典的可微性常常可通过差分算子来导出。

定义 3.1 假设 $u(x)$ 是区域 Ω 上的可测函数记

$$\triangle_h^i u(x) = \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}。$$

则称 $\triangle_h^i$ 是 $u(x)$ 在 e_i 方向上的差分算子，并且记 $\triangle_h^{i*}=-\triangle_{-h}^i$ 是差分算子的伴随算子。

利用文献[5]中的 L^2 估计，先得到：

引理 3.2 假设 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $-\mathrm{div}(A(x)\cdot\nabla u)+Vu=f$ 解，$A(x)$ 满足第一部分定义的一致椭圆和 Lipschitz 连续条件，且 $\Omega'\subset\subset\Omega$，则

$$\int_{\Omega'}|\nabla^2 u|^2\mathrm{d}x \leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x + C\int_\Omega f^2\mathrm{d}x。$$

证明 记 $q(x)=f(x)-V(x)u(x)$，选择截断函数 $\eta\in C_0^\infty(\Omega')$

注意到，若取 $\varphi(x)=\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)\in W_0^{1,2}(\Omega')$ 作为试验函数，则得到：

$$\int_\Omega A(x)\nabla u\cdot\nabla(\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u))\mathrm{d}x = \int_\Omega q(x)\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x,$$

由差分算子和微分算子的可交换性，可知

$$\int_\Omega A(x)\nabla u\cdot\triangle_h^{i*}(\nabla(\eta^2\triangle_h^i u))\mathrm{d}x = \int_\Omega q(x)\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x。$$

差分算子的性质隐含着

$$\int_\Omega \tau_h^i A(x)\nabla(\triangle_h^i u)\cdot\nabla(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x = \int_\Omega q(x)\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \triangle_h^i A(x)\nabla u\cdot\nabla(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_\Omega \tau_h^i A(x)\nabla(\triangle_h^i u)\cdot[\nabla(\triangle_h^i u)\eta^2+2\eta\triangle_h^i u\nabla\eta]\mathrm{d}x =$$
$$\int_\Omega q(x)\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)\mathrm{d}x - \int_\Omega \triangle_h^i A(x)\nabla u\cdot[\nabla(\triangle_h^i u)\eta^2+2\eta\triangle_h^i u\nabla\eta]\mathrm{d}x,$$

至此得到

$$\lambda^{-1}\int_\Omega|\nabla(\triangle_h^i u)|^2\eta^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega|q(x)\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)|\mathrm{d}x +$$
$$2\int_\Omega|\tau_h^i A(x)\|(\eta\nabla(\triangle_h^i u))\|(\triangle_h^i u\nabla\eta)|\mathrm{d}x +$$
$$\int_\Omega|\triangle_h^i A(x)\|\nabla u\|\nabla(\triangle_h^i u)|\eta^2\mathrm{d}x +$$

$$2\int_\Omega |\triangle_h^i A(x)\|\nabla u\|\triangle_h^i u||\eta\nabla\eta|\,\mathrm{d}x。$$

因为

$$\int_\Omega |\triangle_h^{i*}(\eta^2\triangle_h^i u)|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega |\triangle_{-h}^{i}(\eta^2\triangle_h^i u)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega |\nabla(\eta^2\triangle_h^i u)|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\int_\Omega |\eta^2\nabla(\triangle_h^i u)|^2\mathrm{d}x+8\int_\Omega |(\triangle_h^i u)(\eta\nabla\eta)|^2\mathrm{d}x$$

由 Young 不等式，$2ab\leqslant \varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2$，可知

$$\int_\Omega |\nabla(\triangle_h^i u)|^2\eta^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega q^2(x)\mathrm{d}x,$$

应用文献[11] 中引理 7.24，得到

$$\int_{\Omega'} |\nabla^2 u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega q^2(x)\mathrm{d}x。$$

应用 L^2 估计，有

$$\int_\Omega q^2(x)\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega f^2(x)\mathrm{d}x$$

成立。至此完成了引理的证明。

引理 3.3　假设 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $-\mathrm{div}(A(x)\cdot\nabla u)+Vu=f$ 的解，$A(x)$ 满足一致椭圆和 Lipschitz 连续。则对任意的 $x_0\in\Omega$ 和 $r>0$，

$$\int_{B(x_0,r/2)\cap\Omega} |\nabla^2 u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\int_\Omega f^2\mathrm{d}x,\tag{4}$$

其中常数 C 不依赖于 x_0 和 r。

证明　记 $\Omega_r=\Omega\cap B(x_0,r)$，若 $\Omega_r=B(x_0,r)$，即为引理 3.5 的结论。因此，应该考虑 $\Omega_r\neq B(x_0,r)$ 的情形。定义可逆映射 $\psi:B(x_0,r)\to B_1$ 使得：

1) $B_1=\psi(B(x_0,r))$，$B_1^+=\psi(\Omega_r)$；

2) $\partial B_1\cap B_1=\psi(B(x_0,r)\cap\Omega)$；

3) $\psi\in C^2(\overline{B(x_0,r)})$，$\psi^{-1}\in C^2(\overline{B_1})$。

其中 $B(0,1)\subset\mathbb{R}^n$ 是中心在原点半径为 1 的球，$B_1^+=B_1\cap\{x_n>0\}$。对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_r)$，

$$\int_{\Omega_r} a^{ij}D_iuD_j\varphi\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega_r} q(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\tag{5}$$

成立。令 $x=\psi^{-1}(y)$ 且 $J=\left|\det\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)\right|$，有

$$\int_{B_1^+}\tilde{a}^{kl}\,\widetilde{D}_ku\,\widetilde{D}_l\varphi\,\mathrm{d}y=\int_{B_1^+}\tilde{q}\varphi\,\mathrm{d}y$$

其中$\tilde{a}^{kl}=Ja^{ij}\dfrac{y_k}{x_i}\dfrac{y_l}{x_j}$，$\widetilde{D}_k=\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ 及$\tilde{q}=Jq$。考虑$(1\leqslant k\leqslant n-1)x_k$ 方向上的差分算子，取截断函数 $\eta\in C_0^\infty(B_1)$，类似于引理 3.5 的证明，得到

$$\int_{B_{1/2}^+} |\widetilde{D}_k\widetilde{D}u|^2\mathrm{d}y\leqslant C\int_{B_1^+} |\widetilde{D}u|^2\mathrm{d}y+C\int_{B_1^+}\tilde{f}^2\mathrm{d}y,\tag{6}$$

其中$\tilde{f}=Jf$。由式(4)，对任意 $\varphi\in C_0^\infty(B_{1/2}^+)$，

$$\int_{B_{1/2}^+}\tilde{a}^{nn}\,\widetilde{D}_nu\,\widetilde{D}_n\varphi\,\mathrm{d}y=\int_{B_{1/2}^+}\Big[\tilde{q}-\sum_{k+l<n}\widetilde{D}_l(\tilde{a}^{kl}\,\widetilde{D}_ku)\Big]\varphi\,\mathrm{d}y。$$

因此

$$\widetilde{D}_n(\tilde{a}^{nn}\,\widetilde{D}_nu)=\tilde{q}-\sum_{k+l<n}\widetilde{D}_l(\tilde{a}^{kl}\,\widetilde{D}_ku),x\in B_{1/2}^+。$$

或者

$$\widetilde{D}_{nn}u=\widetilde{q}-\sum_{k+l<n}\widetilde{D}_l(\widetilde{a}^{kl}\widetilde{D}_k u)-\widetilde{D}_n\widetilde{a}^{nn}\widetilde{D}_n u。$$

由式(5) 和 Cauchy 不等式得

$$\int_{B^+_{1/2}}|\widetilde{D}^2u|^2\mathrm{d}y\leqslant C\int_{B^+_1}|\widetilde{D}u|^2\mathrm{d}y+C\int_{B^+_1}\widetilde{f}^2\mathrm{d}y$$

成立。然后令 $y=\psi(x)$，得到引理的估计。

现在，这部分剩下的就是关于 $u(x)$ 的一阶导数的估计。对任意的 C^2 区域，通过适当的坐标变换和旋转，不失一般性，假设 Ω 是局部的 C^2 上方图，即

$$\Omega_R=\{(x',x_n)\in\mathbb{R}^n:x_n>\varphi(x'),x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}\cap B(0,R),$$

其中 φ 是一个 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的 C^2 函数，满足 $\varphi(0)=0$。令 $\Phi:\Omega\to\Omega^-$ 是边界 $\partial\Omega$ 上的关于 x_n 轴的反射，定义为：$\Phi(x',x_n)=(x',2\varphi(x')-x_n)$。定义 $\widetilde{A}(x)=\widetilde{a}^{ij}(x)$ 是一 n 维的实值对称矩阵函数，当 $x\in\Omega$ 时，$\widetilde{A}(x)=A^{ij}(x)$；当 $x\in\Omega^-$ 时，$\widetilde{A}(x)=B(x)$，其中 $B(x)=(\Phi'(x))^{\mathrm{T}}A(x)(\Phi'(x))\dfrac{1}{|J(\Phi(x))|}$。至于在 Ω 上的函数 u，当 $x\in\Omega^-$，定义 $u^-(x)=(u\cdot\Phi^{-1})(x)$，并且对任意的 $x\in\Omega$，$\widetilde{u}=u(x)$；对任意的 $x\in\Omega^-$ $\widetilde{u}=-u^-(x)$。记算子 $\widetilde{L}=-\mathrm{div}(B(x)\cdot\nabla)+\widetilde{V}(x)$，其中 $\widetilde{V}(x)$ 和下面要用到的 $\widetilde{f}(x)$ 的定义同 $\widetilde{u}$ 的定义类似。由文献[12]不难看到，$\widetilde{L}$ 仍然是具有有界可测系数的散度型自伴一致椭圆算子。而且对 $x\in\mathbb{R}^n$，$\widetilde{L}\widetilde{u}(x)=\widetilde{f}(x)$。则利用第二部分的结论可知

$$\nabla\widetilde{u}(x)=\int_\Omega\nabla_x\widetilde{G}(x,y)\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\widetilde{G}(x,y)$ 是算子 $\widetilde{L}$ 的 Green 函数。

笔者断言：

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}^2\mathrm{d}x。$$

事实上，如果 f 的支集包含在 $B(0,R)$ 中，则 $\widetilde{f}$ 仍然是有有界支集的函数。为简便起见，不妨就设为 $B(0,R)$。考虑下面两种情况，$|x|\leqslant 2R$ 和 $|x|\geqslant 2R$。当 $|x|\leqslant 2R$ 时，由引理 2.9 得

$$\int_{|x|\leqslant 2R}|\nabla\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{|x|\leqslant 2R}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\widetilde{f}(y)\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-1}}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{|x|\leqslant 2R}\left(\int_{|y|\leqslant 3R}\frac{\widetilde{f}(x-y)\mathrm{d}y}{|y|^{n-1}}\right)^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{|y|\leqslant 3R}\frac{1}{|y|^{n-1}}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}^2(x)\mathrm{d}x\leqslant C(R)\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}^2(x)\mathrm{d}x。$$

当 $|x|\geqslant 2R$ 是，同样引理 2.9 的退化估计推出

$$|\nabla\widetilde{u}|^2\leqslant C|x|^{2-2n}\int_{R^n}\widetilde{f}^2\mathrm{d}y。$$

令 $A_k=\{x:2^kR\leqslant|x|\leqslant 2^{k+1}R\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的环，所以

$$\int_{|x|\geqslant 2R}|\nabla\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|\nabla\widetilde{u}|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|x|^{2-2n}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}^2\mathrm{d}y\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(2^kR)^{2-n}\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}^2\mathrm{d}y。$$

因为 $n\geqslant 3$，上面等式的右边是有限的。故利用映射 Φ 的可逆性，得到了下面的定理：

定理 3.4 假设 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程 $-\mathrm{div}(A(x)\cdot\nabla u)+Vu=f$ 的解，$f\in L^2(\Omega)$ 有有界的支集。$A(x)$ 满足一致椭圆和 Lipschitz 连续，则 $|\nabla u|\in L^2(\Omega)$，而且

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_\Omega f^2\mathrm{d}x。$$

联合引理 3.2，引理 3.3，定理 3.4，有解的 L^2 估计

$$\|\nabla^2u\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}。\tag{7}$$

注 3.5　设 $r>0$，$\varphi\in C_0^{\infty}(B(x_0,3r)\backslash B(x_0,r/2))$ 满足在 $B(x_0,2r)\backslash B(x_0,r)$ 上，$\varphi\equiv 1$，并且 $|\nabla\varphi|\leqslant C/r$，$|\nabla^2\varphi|\leqslant C/r^2$。$u\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是方程

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla(u\varphi))=g,x\in\Omega$$

的解，其中 $g=f\varphi-Vu\varphi-\operatorname{div}(A(x)\nabla\varphi)u-2A(x)\nabla u\nabla\varphi$。则式(7)隐含着

$$\int_{\Omega}|\nabla^2(u\varphi)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}f^2\varphi^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}V^2u^2\varphi^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla A(x)|^2u^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+$$
$$2\int_{\Omega}A(x)^2|\nabla u|^2|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}A(x)^2u^2|\triangle\varphi|^2\mathrm{d}x,$$

这意味着

$$\int_{\{r<|x-x_0|<2r\}\cap\Omega}|\nabla^2u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\{r/2<|x-x_0|<3r\}\cap\Omega}|f|^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{C}{r^2}\int_{\{r/2<|x-x_0|<3r\}\cap\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{C}{r^4}\int_{\{r/2<|x-x_0|<3r\}\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}x。$$

对任意的 $\varepsilon>0$，由内插不等式

$$\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int|\nabla^2u|^2\mathrm{d}x+C_{\varepsilon}\int|u|^2\mathrm{d}x,$$

得到

$$\int_{\{r<|x-x_0|<2r\}\cap\Omega}|\nabla^2u|^2\mathrm{d}x\leqslant C\int_{\{r/2<|x-x_0|<3r\}\cap\Omega}|f|^2\mathrm{d}x+\frac{C}{r^4}\int_{\{r/2<|x-x_0|<3r\}\cap\Omega}|u|^2\mathrm{d}x。$$

至此已经证到关键的步骤，然后由文献[6]中所应用的技术，可以得到定理 1.2 的证明。

参考文献：

[1] KADLEC J. On the regularity of the solution of the Poisson problem on a domain with boundary locally similar to the boundary of a convex open set[J]. Czechoslovak J Math, 1964, 14(89): 386-393.

[2] ADOLFSSON V. L^p Integrability of the second order derivatives of green potentials in convex domains[J]. Pacific J Math, 1993, 159(2): 201-225.

[3] TAO X. The atomic decompostion for Hardy space on domain and their dual spaces[J]. Journal of Mathematical Study, 1996, 29(3): 6-11.

[4] SHEN Z. L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials[J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1995, 45(2): 513-546.

[5] SHEN Z. On the Neumann problem for the Schrödinger operators in Lipschitz domains[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1994, 43(1): 143-176.

[6] TAO X, WANG H. On the Neumann problem for the Schrödinger equations with singular potentials in Lipschitz domains[J]. Canad J Math, 2004, 56(3): 655-672.

[7] KURATA K, SUGANO S. A remark on estimates for uniformly Elliptic operators on weighted L^p space and Moreey spaces[J]. Math Nachr, 2000, 209(1): 137-150.

[8] SHEN Z. On fundamental solutions of generalized Schrödinger operators[J]. Journal of Functional Analysis, 1999, 167(2): 521-564.

[9] VERCHOTA G. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domain[J]. Journal of Functional Analysis, 1984, 59(3): 572-611.

[10] GRUTERA M, WIDMAN K O. The green function for uniformly elliptic equations[J]. Manuscr Math, 1982, 37(3): 303-342.

[11] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order[M]. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1983.

[12] ADOLFSSON V. L^2 Integrability of second-order derivatives for Poisson's equations in non-smooth domains[J]. Math Scand, 1992, 70(3): 146-160.