浙江科技学院学报，第 23 卷第 4 期，2011 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 4，Aug. 2011

DOI：10.3969/j.issn.1671-8798.2011.04.003

纽结及其镜面像

陶志雄
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：给出了一种纽结的构造，它具有如下性质：对于该纽结的某一个图，当改变其中的一个交叉点时即可得其镜面像。使用纽结多项式及一些特殊构造，证明了这样的素纽结有无穷多个。

关键词：Conway 多项式；纽结；镜面像
中图分类号：O189.24　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2011)04-0268-03

Knot and its mirror image

TAO Zhi-xiong
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

Abstract：A kind of knot is given，each of which has the property that its mirror image can be obtained by changing a crossing. Furthermore，the study shows that there are infinitely many such prime knots by using Conway polynomial and a special construction of knots.

Key words：Conway polynomial；knot；mirror image

一个素纽结是否存在一个投影图[1-2]，使得改变其中的一个交叉所得新纽结同痕于原纽结。这个问题首先由 X-S Lin 提出[3]，这篇文献试图考虑这个问题。本文通过构造纽结，说明有无穷多的素纽结改变一个交叉成为原纽结的镜面像[1]。即有下述结论：

定理　存在无穷多的素纽结，使得改变一个交叉所得纽结同痕于原纽结的镜面像。

1　基本知识

定义[1-2]　对于任意定向的纽结或链环 L，可定义多项式$\nabla(L;z) \in \mathbb{Z}[z]$，满足以下性质：若纽结或链环 L_+，L_-，L_0 除了图 1 所示的部分相异外，其他处均恒同，则有：

1) $\nabla(L_+;z) - \nabla(L_-;z) = z\nabla(L_0;z)$，

收稿日期：2010-10-07
基金项目：浙江科技学院教学研究项目(2009ⅡB-a53)
作者简介：陶志雄(1961—　)，男，浙江省绍兴人，副教授，博士，主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

2) ∇(平凡纽结;z) = 1,

那么多项式$\nabla(L;z)$是一个纽结和链环不变量,称为Conway多项式。

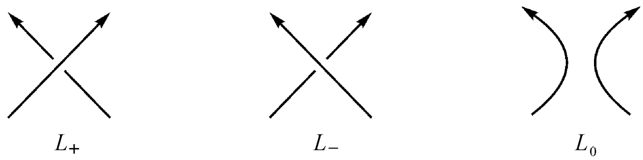


图 1　L_+, L_-, L_0

Fig. 1　L_+, L_-, L_0

2　定理的证明

证明　如图 2 所示是变换的实现过程,方盒所示的是一个 tangle[4],倒写的 P 表示 P 关于中间水平线的一个翻转,P! 表示 P 的镜面像,改变图 2(1)中虚线圆所圈定的交叉,然后绕图 2(2)中水平中间虚线旋转 180°,那么所得的投影图就是原纽结(图 2(1))的镜面像,见图 2(3)。

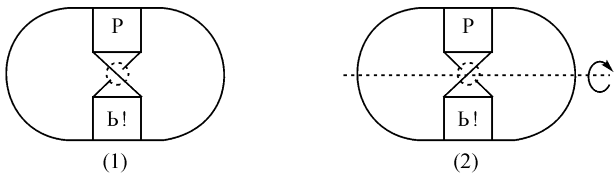


图 2　变换的实现过程

Fig. 2　Implementation process of transformation

下面证这样的纽结有无穷多个:

考察图 3 所示的纽结,上下两排交叉分别有 $(2n+1)$ 个,上排交叉与中排交叉都是负的,下排交叉都是正的。这是一个 pretzel 纽结 $p(2n+1,1,-2n-1)$,故是素的。显然只要说明图 3 中的纽结相异即可。为此计算它的 Conway 多项式,改变这些正交叉,记 L 是 2 个分支的环面链环 $T(2,-2n-2)$,得:

$\nabla(p(2n+1,1,-2n-1);z)-\nabla(p(2n+1,1,-2n+1);z)=z\nabla(L;z)$,

…,

$\nabla(p(2n+1,1,-3);z)-\nabla(p(2n+1,1,-1);z)=z\nabla(L;z)$,

将这些式子相加并注意到 $p(2n+1,1,-1)$ 是平凡纽结,整理得:

$\nabla(p(2n+1,1,-2n-1);z)=1+nz\nabla(L;z)$,

依次改变 L 的交叉有

$\nabla(L;z)-\nabla(T(2,-2n);z)=-z$,

…,

$\nabla(T(2,-2);z)-\nabla(T(2,0);z)=-z$,

因为 $T(2,0)$ 是 2 个分支的平凡链环,相加得:

$\nabla(L;z)=-(n+1)z$,

于是　　$\nabla(p(2n+1,1,-2n-1);z)=1-n(n+1)z^2$,

由于它与 n 有关,故有无穷多个这样的纽结。

进一步,由于该 pretzel 纽结是一个 2-bridge 纽结[1-2,5],所以它是素的(见文献[5])。

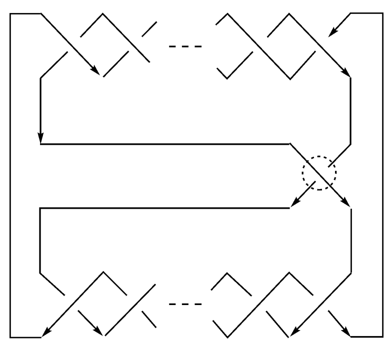


图 3　$p(2n+1,1,-2n-1)$

Fig. 3　$p(2n+1,1,-2n-1)$

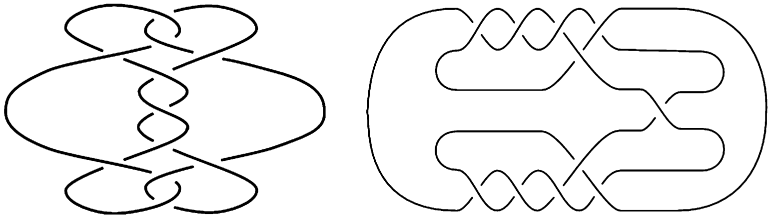
3　例　子

给出一些交叉不超过 10 的上述纽结,根据定理可以构造以下纽结:

1）$p(3,1,-3)$ 即纽结 6_1[1-2,6]，$p(5,1,-5)$ 即纽结 10_3。

2）图 4(1) 之纽结是 8_8。

3）图 4(2) 之纽结是 10_{22}。



(1) (2)

图 4 纽结例子

Fig. 4 Examples of knots

易见它们都是上述所指的纽结。

参考文献：

[1] KAUFFMAN L H. On Knots [M]. Beijing: World Publishing Corporation (Princeton University Press), 1990.

[2] KAWAUCHI A. A Survey of Knot Theory [M]. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1996.

[3] KIRBY R. Problems in low-dimensional topology [C]// Proceedings of Georgia Topology Conference, Berkely: [s. n.], 1995.

[4] ELIAHOU S, KAUFFMAN L H, THISTLETHWAITE M B. Infinite families of links with trivial Jones polynomial [J]. Topology, 2003, 42(15): 155-169.

[5] BURDE G, ZIESCHANG H. Knots [M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1985.

[6] BAR-NATAN D. The Rolfsen Knot Table [EB/OL]. [2010-10-01]. http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table.

（上接第 261 页）

参考文献：

[1] MUCKENHOUPT B, WHEEDEN R L. Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals[J]. Trans Amer Math Soc, 1971(161): 249-258.

[2] FAN D S, PAN Y B. Singular integrals with rough kernel operators supported by subvarieties[J]. Amer J Math, 1997, 119(4): 799-839.

[3] COIFMAN R R, ROCHBERG R, WEISS G. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables[J]. Annals of Math, 1976(103): 611-635.

[4] LU S Z, YANG D C. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators[J]. Approx Theory Appl, 1995, 11(3): 72-94.

[5] ALVAREZ J, LAKEY J, GUZMAN-PARTIDA M. Spaces of bounded λ-central mean oscilation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures[J]. Collect Math, 2000(51): 1-47.

[6] FU Z W, LIN Y, LU S Z. λ-central BMO estimates for commutators of singular integrals with rough kernels[J]. Acta Math Sinica (English Ser), 2008(24): 373-386.

[7] PEREZ C, TRUJILLO-GONZALEZ R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators[J]. J London Math Soc, 2002, 65(2): 672-692.

[8] STEIN E M. Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals[M]. Princeton Univ Press, 1993.

[9] TAO X X, SHI Y L. Multilinear commutators of Calderon-Zygmund operator on λ-central Morrey spaces[J]. Adv Math, 2011, 40(1): 47-59.