

## 关于 Q 值法的一种改进

王 颖

(安徽科技学院 数理与信息工程学院,安徽 滁州 233100)

**摘 要:** Q 值法是处理席位公平分配问题的一种简便实用的方法。通过分析 Q 值法和新 Q 值法的优缺点,借鉴它们的思想,对相对不公平度的度量问题进行了探讨;并在此基础上给出了新的相对不公平度的定义及计算 Q 值的简易算法,同时结合实例对 3 种方法进行了对比分析,进而揭示了三者之间的联系与区别,认为新方法避免了已有 Q 值法的一些缺陷,相对更为合理。

**关键词:** 相对不公平度;Q 值法;席位公平分配

中图分类号: O221

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2015)01-0011-04

## Improvement of Q-value method

WANG Ying

(College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Anhui Science and Technology University,  
Chuzhou 233100, China)

**Abstract:** Q-value method is a simple and practical method for processing the fair allocation of seats. After analyzing the advantages and disadvantages of Q-value method and new Q-value method, and referring their ideas to discuss just allocation of seats number, we put forward a new definition of relative injustice value and a simple calculating method of Q value. We also compare and analyze the three methods, reveal the connection and distinction among them. The new method avoids some shortcomings of Q-value method now, which is more reasonable.

**Key words:** relative injustice value; Q-value method; just allocation of seats number

席位公平分配研究的是一类资源分配问题,在管理和对策论等众多领域具有广泛的应用价值。在处理这个问题时,早期使用的是尾数最大法,后来又陆续采用了 Q 值法<sup>[1-3]</sup>、D'Hondt 法、新 Q 值法<sup>[4]</sup>、最大熵法<sup>[5]</sup>、判别数法、最小极差法及最大概率法等。然而,由于席位分配问题的复杂性,很多情况下并不存在绝对公平的分配方法。笔者通过对 Q 值法和新 Q 值法的比较研究,参照它们对相对不公平度的定义,

---

收稿日期: 2014-12-02

基金项目: 安徽省重大教学改革研究项目(2014zdjy098);安徽科技学院自然科学研究项目(ZRC2014441)

作者简介: 王 颖(1975— ),女,江苏省徐州人,副教授,硕士,主要从事泛函微分方程及高等教育与教学的研究。

给出了相对不公平度的新定义,并在此基础上提出了较简单合理的 Q 值计算方法。

## 1 经典 Q 值法和新 Q 值法的评价

### 1.1 问题的一般表述

设  $m$  方共  $P$  人参与总席位数为  $N$  的分配,第  $i$  方的人数为  $p_i (i=1,2,\dots,m)$ ,记第  $i$  方分配到的席位数为  $n_i$ ,试问  $n_i$  是多少?

例如,设某学院有 3 个系共 200 名学生,其中甲系 103 名、乙系 63 名、丙系 34 名。现召开学生代表大会,设 21 个席位,试确定公平合理的席位分配方案。

对于这种问题,通常的做法是按人数比例分配席位,当出现小数时采用尾数最大法。但是实践表明,这种比例加惯例的分配方法在很多情况下并不一定公平合理,因而出现了很多其他方法,本研究仅就 Q 值法进行详细讨论。

### 1.2 经典 Q 值法

设 A、B 两方人数分别为  $p_1$  和  $p_2$ ,占有的席位分别为  $n_1$  和  $n_2$ ,当  $p_1/n_1 > p_2/n_2$  时,经典 Q 值法定义对 A 方的相对不公平度为

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} \quad (1)$$

当总席位增加 1 席时,根据公平的席位分配方法应该使得相对不公平度尽量小,定义 Q 值

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i=1,2, \quad (2)$$

并将增加的 1 席分给 Q 值较大的一方。式(2)可以推广到有  $m$  方分配席位的情况,当总席位增加 1 席时,计算 Q 值为

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (3)$$

并将增加的 1 个席位分配给 Q 值最大的一方,这就是席位分配问题的 Q 值法<sup>[3]</sup>。

利用 Q 值法对甲乙丙三系分配 21 个席位问题的分配结果是:甲系 11 席,乙系 6 席,丙系 4 席。

Q 值法的优点是:在  $p_i/n_i (i=1,2,\dots,m)$  不相等的情况下尽量将相对不公平度降到最低,并且保证了总席位增加时各方所占席位不会减少。然而其缺陷也比较明显,只有当  $n_i \geq 1$  时,  $Q_i$  才有意义,因而 Q 值法要求各方至少已有一个席位,在总席位比较少或各方人数相差较大的时候可能会导致较大的不公平。

### 1.3 新 Q 值法

在新 Q 值法中,将

$$r_i = \frac{p_i/n_i - P/N}{P/N} = \frac{p_i N}{P n_i} - 1 \quad (4)$$

定义为第  $i$  方的相对不公平值,称

$$Q_i = \frac{p_i N}{P n_i} \quad (5)$$

为第  $i$  方的 Q 值,并在此基础上提出了新 Q 值法:先给各方按人数比例取整分配,然后由式(5)计算各方的 Q 值,再将剩余席位逐一增加给那些 Q 值较大的各方。

新 Q 值法所定义的相对不公平值是把  $i$  方放到所有各方构成的整体中去考虑,能够较好地衡量席位分配的不公平度。但是,这种方法在各方人数相差较大的时候对人数较多方可能不利。如前面所举例子,利用新 Q 值法对甲乙丙三系分配 21 个席位问题的分配结果是:甲系 10 席,乙系 7 席,丙系 4 席。乙丙两方共 97 人占 11 席,甲方 103 人只占 10 席,显然这对甲方而言不太公平。此外,由于  $Q_i = \frac{p_i}{n_i} \cdot \frac{N}{P}$ ,而

$\frac{N}{P}$  是常数,  $\frac{p_i}{n_i}$  表示的是第  $i$  方每席代表人数, 因而新 Q 值法实质上就是先给各方按人数比例取整分配, 然后再将剩余席位逐一增加给那些每席代表人数较大的各方。这样看来, 式(5)定义的 Q 值也可以改为  $Q_i = \frac{p_i}{n_i}$ , 分配结果完全一致, 后者显然更为简便。

## 2 Q 值法的改进探讨

### 2.1 Q 值计算的改进

寻求公平分配席位方法的关键, 是建立衡量不公平程度的既合理又简明的数量指标。现借鉴 Q 值法和新 Q 值法的思想, 从另一个角度对相对不公平度进行定义。

**定义:** 设 A、B 两方人数分别为  $p_1$  和  $p_2$ , 所占席位分别为  $n_1$  和  $n_2$ , 记  $P = p_1 + p_2$ ,  $N = n_1 + n_2$

当  $n_1/p_1 < n_2/p_2$  时, 称

$$r_A(n_1, n_2) = \frac{n_2/p_2 - n_1/p_1}{N/P} \quad (6)$$

为对 A 方的相对不公平度。

当  $n_1/p_1 > n_2/p_2$  时, 称

$$r_B(n_1, n_2) = \frac{n_1/p_1 - n_2/p_2}{N/P} \quad (7)$$

为对 B 方的相对不公平度。

以下利用新定义的相对不公平度讨论当总席位增加 1 席时, 应该分配给 A 方还是 B 方。假设  $n_1/p_1 < n_2/p_2$ , 即对 A 不公平, 当再分配 1 席时, 可能出现以下 3 种情况:

1) 若  $(n_1 + 1)/p_1 \leq n_2/p_2$ , 则显然增加的 1 席应分给 A 方;

2) 若  $(n_1 + 1)/p_1 > n_2/p_2$ , 则说明当 A 方增加 1 席时将对 B 方不公平, 此时

$$r_B(n_1 + 1, n_2) = \frac{(n_1 + 1)/p_1 - n_2/p_2}{N/P} \quad (8)$$

3) 若  $n_1/p_1 < (n_2 + 1)/p_2$ , 则说明当 B 方增加 1 席时将对 A 方不公平, 此时

$$r_A(n_1, n_2 + 1) = \frac{(n_2 + 1)/p_2 - n_1/p_1}{N/P} \quad (9)$$

因为公平分配的原则是使相对不公平度尽可能小, 所以如

$$r_A(n_1, n_2 + 1) > r_B(n_1 + 1, n_2) \quad (10)$$

则这一席应分给 A 方; 反之则分给 B 方。根据式(7)~(9), 可知式(10)等价于

$$\frac{p_1}{2n_1 + 1} > \frac{p_2}{2n_2 + 1} \quad (11)$$

易知上述第 1 种情况的  $(n_1 + 1)/p_1 \leq n_2/p_2$  也会导致式(11)成立。于是可以得出结论: 当式(11)成立时, 增加的 1 席应分给 A 方; 反之则分给 B 方。即若令  $Q_i = \frac{p_i}{2n_i + 1}$ ,  $i = 1, 2$ , 则增加的 1 席应分配给 Q 值较大的一方。

该方法可以推广到有  $m$  方分配席位的情况, 当总席位增加 1 席时, 计算 Q 值如下:

$$Q_i = \frac{p_i}{2n_i + 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

可将增加的 1 个席位分配给 Q 值最大的一方。为方便起见, 不妨将式(12)定义的 Q 值称为修正 Q 值。

现用修正 Q 值讨论甲乙丙三系分配 21 个席位的问题。

对于前 19 个席位, 采用修正 Q 值进行分配与采用按比例取整分配的结果是一致的, 即甲系 10 席, 乙系 6 席, 丙系 3 席。

第 20 席的分配方法:  $Q_1 = \frac{103}{2 \times 10 + 1} \approx 4.90$ ,  $Q_2 = \frac{63}{2 \times 6 + 1} \approx 4.85$ ,  $Q_3 = \frac{34}{2 \times 3 + 1} \approx 4.86$ ,  $Q_1$  最大, 所以这一席位应分配给甲系。

第 21 席的分配方法:  $Q_1 = \frac{103}{2 \times 11 + 1} \approx 4.48$ ,  $Q_2, Q_3$  不变,  $Q_3$  最大, 所以这一席位应分配给丙系。

最终的分配结果是: 甲系 11 席, 乙系 6 席, 丙系 4 席, 总席位得到了相对公平的分配。这个结果与采用经典 Q 值法的结果一致, 而与新 Q 值法的结果存在差异。

## 2.2 经典 Q 值、新 Q 值与修正 Q 值的比较

为便于比较分析, 对 3 种 Q 值计算公式进行变形后分别为:

$$Q_i = \frac{1}{\frac{n_i}{p_i} \cdot \frac{(n_i+1)}{p_i}} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n_i}{p_i} \cdot \frac{(n_i+1)}{p_i}}\right)^2};$$

$$Q_i = \frac{N}{P} \cdot \frac{1}{n_i/p_i};$$

$$Q_i = \frac{p_i}{2n_i+1} = \frac{1}{\frac{n_i}{p_i} + \frac{n_i+1}{p_i}}.$$

显然,  $\frac{n_i}{p_i}$  和  $\frac{n_i+1}{p_i}$  分别是不给  $i$  方增加 1 席和给  $i$  方增加 1 席时,  $i$  方席位占  $i$  方人数的比例。因而, 3 种方法分配的依据都可以归纳到  $i$  方席位占  $i$  方人数的比例, 只不过具体运用上有所差别。要使  $Q_i$  最大, 经典 Q 值法是要求  $\sqrt{\frac{n_i}{p_i} \cdot \frac{(n_i+1)}{p_i}}$  最小, 即  $\frac{n_i}{p_i}$  和  $\frac{n_i+1}{p_i}$  的几何平均值最小; 新 Q 值法则要求  $\frac{n_i}{p_i}$  最小, 即看哪一方席位  $n_i$  占人数  $p_i$  的比例最小; 而修正 Q 值法要求  $\frac{n_i}{p_i} + \frac{n_i+1}{p_i}$  最小, 即  $\frac{n_i}{p_i}$  和  $\frac{n_i+1}{p_i}$  的算术平均值最小。

## 3 结 语

公平的席位分配是一个实用性很强且比较复杂的问题。本研究在 Q 值法和新 Q 值法的基础上, 对席位分配进行了探讨, 给出了相对不公平度的新定义, 并在此基础上提出了较为简便的计算 Q 值的方法, 最后对 3 种方法进行了比较分析。总体而言, 修正 Q 值具有较为直观的意义, 且计算简便, 适用性强, 在席位分配问题中具有一定的实用价值。

## 参考文献:

- [1] 王若鹏. 席位公平分配问题 Q 值法的改进[J]. 北京石油化工学院学报, 2011, 19(2): 61-64.
- [2] 邵正隆, 王慧, 邹向荣. 基于 Q 值法的奖学金自动分配方案的设计与应用[J]. 计算机应用, 2011, 31(11): 3132-3134.
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [4] 岳林. 关于 Q 值法的一种新定义[J]. 系统工程, 1995, 13(4): 70-72.
- [5] 高尚. 席位分配的最大熵法[J]. 数学的实践与认识, 1996(2): 73-75.