

基于 Copula 方法的 Lee-Carter 模型的 长寿互换风险定价研究

胡 月,陈岚岚,章迪平

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 针对已有的长寿互换产品在考虑人口死亡率相依性方面不足的问题,引入 Copula 函数,建立具有相依性的 Lee-Carter 模型,并应用 Sharpe 比率定价法对长寿互换定价。首先,根据中国 1994—2017 年的数据进行实证分析,发现改进后的死亡率模型对总体的长寿风险刻画更符合实际,优于原有模型;其次,应用蒙特卡罗模拟方法预测未来的死亡率,通过 Sharpe 比率定价法给出退休人口的长寿风险定价,使得定价更趋于合理,同时发现,女性进行长寿互换所需的风险溢价要高于男性;最后,分析了样本周期、起始时间、Sharpe 比率及长寿互换的期限对长寿互换定价的影响,发现各因素对长寿互换定价的影响均显著,进一步验证了 Sharpe 比率法对长寿互换的有效性。利用本方法对长寿风险进行定价更趋于现实。

关键词: Copula;长寿风险;Lee-Carter 模型;相依性;风险溢价;长寿互换

中图分类号: F840.323

文献标志码: A

文章编号: 1671-8798(2020)06-0509-07

Research on longevity swap risk pricing based on Lee-Carter model of Copula method

HU Yue, CHEN Lanlan, ZHANG Diping

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, Zhejiang, China)

Abstract: In response to the problem that the existing longevity swap products are deficient in considering the dependence of population mortality, the Copula function was introduced to establish the dependent Lee-Carter model. In addition, the Sharpe ratio pricing method was used to price the longevity swap. Firstly, according to the empirical analysis of China's data from 1994 to 2017, it was found that the improved mortality model is more realistic and better than the original model in describing the overall longevity risk; secondly, the Monte Carlo simulation was used to simulate and predict the future mortality, and the longevity risk price of the retired population was given through the Sharpe ratio pricing method, making the pricing more reasonable, and at the same time, it turned out that women need a

收稿日期: 2020-05-21

基金项目: 浙江省科技计划项目(2015C33088)

通信作者: 胡 月(1964—),男,河南省西峡人,教授,硕士,主要从事概率论极限理论和金融数学研究。E-mail: huyuexxx@sina.com。

higher risk premium than men for longevity swap; finally, by analyzing the impact of the sample period, the start time, the Sharpe ratio and the term of longevity swap on the pricing of longevity swap, it was found that each factor is significant to the pricing of longevity swap, which further verifies effectiveness of the Sharpe ratio method for longevity swap. It is more realistic to use this method to price longevity risk.

Keywords: Copula; longevity risk; Lee-Carter model; dependence; risk premium; longevity swap

随着人们生活质量的提高,世界各国人均寿命得以延长,但由此引发的长寿风险日趋严峻。对此,研究者们提出长寿风险证券化,即将长寿风险转移至资本市场。在设计长寿风险证券化产品的过程中,主要面临的问题有死亡率模型的确定及长寿风险证券化产品的运行机制及定价。预测死亡率是有效管理长寿风险的基础,由于传统的静态死亡率模型未考虑到死亡率与时间的变化关系,不适用于死亡率的预测,因此研究者们提出了动态死亡率模型。其中, Lee 和 Carter 提出了 Lee-Carter 模型^[1],该模型被美国统计局用于美国的长期死亡率预测。在此基础上,国内外研究者们对其进行扩展和改进。Renshaw 等^[2]引入出生年效应; Russolillo^[3]将 Lee-Carter 模型中的趋势项增加了时间、年龄与人群三因素; Kleinow^[4]用主成分分析法估计不同人群的共同年龄效应,建立了共同年龄效应(common age effect, CAE)模型; Enchev^[5]对比了 CAE 模型和 Lee-Carter 模型的预测效果,发现 CAE 模型效果较好; 吴晓坤等^[6]对模型参数再抽样,优化 Lee-Carter 模型的预测效果; 赵明等^[7]以中国为例,将不同阶段人口死亡率的变动特征,引入 Lee-Carter 模型; 柳向东等^[8]考虑不同地区之间死亡率的长期均衡关系,建立了误差修正模型预测 Lee-Carter 模型中的趋势项; 王志刚等^[9]假设男女死亡率线性相关,引入 Lee-Carter 模型,并对中国人口死亡率进行预测; 王志刚等^[10]建立了具有相关性的多总体 Lee-Carter 模型; 赵明等^[11]对比了多人口 Lee-Carter 模型的效果,发现多人口率模型在稳健性方面表现更好。

长寿风险产品定价主要有风险中性定价法^[12]、单因素 Wang 转换法^[13]、双因素 Wang 转换法^[14]和 Sharpe 比率定价法^[15]。樊毅等^[16]应用双因素 Wang 转换法对长寿债券进行定价; 由于风险中性定价法的风险中性测度较难确定, 胡仕强等^[17]提出用最大熵方法来确定风险中性测度; 宋平凡等^[18]提出用相对熵方法确定风险中性测度; Liu 等^[19]考虑了投资组合的敏感性和隐藏状态的负债提出了广义状态-空间对冲方法; 田玲等^[20]提出运用风险立方模型对长寿债券进行定价; 杨刚等^[21]提出利用百分位分层定价法对逆生存债券进行定价。在实践应用中的定价方法主要有 Wang 转换定价法和 Sharpe 定价法。相比 Wang 转换定价法, Sharpe 比率定价法计算更简便。

目前,关于具有非线性相依的长寿互换产品研究较少,而忽视这种相依性将会对长寿风险衍生产品的定价造成不可忽视的影响。因此,本文基于经典的 Lee-Carter 模型,深入挖掘中国男女群体之间死亡率的相依关系,建立改进的 Lee-Carter 模型,并给出 Sharpe 比率定价法下的长寿互换产品价格。

1 死亡率预测模型的建立

目前,对长寿风险产品定价时往往应用单一群体的死亡率进行定价,对总体死亡率进行定价时则用简单线性相加的方法,当不同群体之间的死亡率是相互独立时,该方法不会出现问题。然而,在现实中,由于同一地区具有相同的社会生活环境,男性与女性之间死亡率的变化进程往往存在相依关系,并且保险公司或养老基金需要转移的长寿风险并不是单一群体的长寿风险,应用单一群体的死亡率替代总体的死亡率会产生基差风险,若进行简单的线性相加会产生风险估计的偏差。因此,在研究中考考虑相依性是有必要的。

1.1 二维 Lee-Carter 模型的建立

对中国男性人口死亡率和女性人口死亡率建立二维 Lee-Carter 模型:

$$\begin{cases} \ln m_{x,t}^M = \alpha_x^M + \beta_x^M k_t^M + e_{x,t}^M; \\ \ln m_{x,t}^F = \alpha_x^F + \beta_x^F k_t^F + e_{x,t}^F. \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: M 表示男性; $m_{x,t}^M$ 为 x 岁的男性在第 t 年的中心死亡率; 假设每一年龄内死亡服从均匀分布, 则

中心死亡率 $m_{x,t} = q_{x,t} / (1 - 0.5q_{x,t})$, $q_{x,t}$ 为人口死亡率; α_x^M 为男性的年龄因子,与年龄相关,反映了不同年龄死亡率自然对数的平均水平; β_x^M 为男性不同年龄的死亡率变动强度; k_t^M 为男性人口死亡率随时间变化的特征; $e_{x,t}^M$ 为男性模型的随机扰动项,满足 $E(e_{x,t}^M) = 0$, $\text{Var}(e_{x,t}^M) = \delta^2$; F 表示女性,其模型的符号含义与男性相同。为了使 Lee-Carter 模型有唯一解,做如下假设:

$$\sum_{t=1}^T k_t^M = 0, \sum_x \beta_x^M = 1, \sum_{t=1}^T k_t^F = 0, \sum_x \beta_x^F = 1. \quad (2)$$

式(2)中: T 为观测年数。

1.2 Copula-ARIMA 模型的建立

Sklar^[22] 提出 Copula 函数理论, Copula 函数可以将一个联合分布函数与它们各自的边缘分布函数连接在一起,描述变量之间的相依关系。阿基米德 Copula 函数族中,最常用的有 Frank Copula 函数、Gumbel Copula 函数和 Clayton Copula 函数,以二元阿基米德 Copula 函数为例,其表达式和生成元见表 1。

表 1 二元阿基米德 Copula 函数

Table 1 Binary Archimedes Copula function

二元阿基米德 Copula 函数	表达式 $C(u, v; \theta)$	生成元 $\varphi(t; \theta)$
Frank Copula	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
Gumbel Copula	$e^{[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}}$	$(-\ln t)^\theta$
Clayton Copula	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$t^{-\theta} - 1$

引入二元 Copula 函数,与差分自回归移动平均 (autoregressive integrated moving average, ARIMA) 模型相结合,建立具有相依性的 ARIMA(p, d, q) 模型:

$$\begin{cases} \Delta^d k_t^M = \mu^M + \epsilon_t^M + \sum_{i=1}^p \omega_i^M \Delta^d k_{t-i}^M + \sum_{i=1}^q \lambda_i^M \Delta^d k_{t-i}^M; \\ \Delta^d k_t^F = \mu^F + \epsilon_t^F + \sum_{i=1}^p \omega_i^F \Delta^d k_{t-i}^F + \sum_{i=1}^q \lambda_i^F \Delta^d k_{t-i}^F; \\ (\epsilon_t^M, \epsilon_t^F) \sim C\left(\varphi\left(\frac{\epsilon_t^M}{\sigma_{\epsilon_t^M}}\right), \varphi\left(\frac{\epsilon_t^F}{\sigma_{\epsilon_t^F}}\right)\right); \\ t = 1, 2, \dots, T. \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中: $\Delta^d k_t^M$ 和 $\Delta^d k_t^F$ 分别为 k_t^M 和 k_t^F 的 d 阶差分项; μ^M 和 μ^F 为常数项; ω_i^M 和 ω_i^F 为自回归系数; ϵ_t^M 和 ϵ_t^F 均为正态分布的白噪声序列; $\sigma_{\epsilon_t^M}$ 和 $\sigma_{\epsilon_t^F}$ 分别为 ϵ_t^M 和 ϵ_t^F 的标准差; $\varphi(x)$ 为正态分布函数; $C(u, v)$ 为二元 Copula 函数,它描述了两个白噪声之间的相依结构。

1.3 两个模型的比较

由于两个模型对单一群体的假设是相同的,因此对单一群体进行预测时,应用改进的 Lee-Carter 模型得到的均值和方差与原模型的相等。对总体进行预测时, Lee-Carter 模型的假设条件是男女死亡率相互独立,改进的 Lee-Carter 模型的假设条件是男女死亡率是相依的。

用 E^M 、 E^F 和 E^P 分别表示男性、女性和总体的均值, D^M 、 D^F 和 D^P 分别表示男性、女性和总体的方差, ρ 表示相关系数。在预测总体时,无论男性与女性的死亡率是否相关,都有 $E^P = E^F + E^M$ 成立。但是对方差估计时,有 $D^P = D^F + D^M + 2\rho \sqrt{D^F D^M}$, 只有当男性、女性群体的死亡率相互独立时, $D^P = D^F + D^M$ 才成立。

2 长寿互换运行机制及定价

2.1 长寿互换运行机制

长寿互换是交易双方基于目标人群的未来实际死亡率和预期死亡率进行的现金流互换合同。Lin 等^[23] 最早对其进行了理论探索,随后 Dowd 等^[12] 提出了每年互换一方以固定现金流交换另一方浮动现金流的普通长寿互换,简称长寿互换。

Coughlan 等^[24]正式提出 q 远期合约的概念及设计机制。 q 远期合约是一种新型的建立在摩根大通公司编制的标准化生命指标基础上的死亡率互换合约,它是普通生存互换的特殊形式。 q 远期合约的内容如下:约定到期时根据实际死亡率与固定死亡率进行一次现金流互换的协议。图 1 是 q 远期合约的运行机制,在期初,约定固定支付为 $K_t = q_e'V$,由死亡率模型预先确定,其中 $q_e' = (1 + \pi')q_e$ 为经过风险调整后的预期死亡率, V 为面值;浮动支付为 $S_t = q_tV$,由实际死亡率确定,其中 q_t 为实际死亡率,根据摩根大通公司编制的标准化生命指标中的死亡率指数确定。

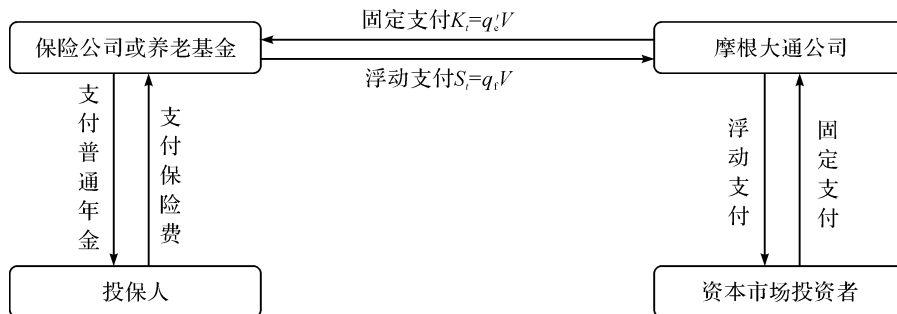


图 1 q 远期合约运行机制

Fig. 1 Operating mechanism of q forwards contract

2.2 Sharpe 比率定价法

预先给定一个 Sharpe 比率 S ,即风险参数的市场价格,可以对比某项资产的 Sharpe 比率获得。如果一项资产潜在风险越高或与其他资产相关性越高,那么 S 越大;若资产流动性越低,则 S 越大。Sharpe 比率公式如下:

$$S = \frac{E(R)}{\sigma} = \frac{q_e - q_t}{t\sigma_q q_e} \Leftrightarrow q_t = (1 - S\sigma_q t)q_e. \quad (4)$$

式(4)中; $E(R)$ 为年预期收益率; σ 为死亡率同比变化标准差。

预期死亡率加上负风险溢价与预期死亡率的乘积等于实际的死亡率,即 $(1 + \pi_t')q_e = q_t$,则风险溢价 $\pi_t = -\pi_t'$,结合式(4)可以推导出:

$$\pi_t = -\frac{q_t - q_e}{q_e} = S\sigma_q t. \quad (5)$$

3 实证分析

3.1 数据说明

本研究利用中国男性与女性人口死亡率数据进行实证分析,数据来源于《1995—2006 年中国人口统计年鉴》和《2007—2018 年中国人口和就业统计年鉴》。计算男性与女性死亡率的 Pearson 相关系数,结果为 0.97,且 p 值均小于 0.01,通过显著性检验。图 2 为 1994—2017 年男女死亡率散点图。由图 2 可知,男女死亡率的数据集中在零点附近,然后逐渐发散,说明男性与女性群体的死亡率确实存在相依关系。

3.2 参数估计

利用最小二乘法计算出男性女性 α 、 β 和 k 的估计值,如图 3~5 所示。计算得到 α^F 和 α^M 的 Pearson 相关系数为 0.994, β^F 和 β^M 的 Pearson 相关系数为 0.605, k^F 和 k^M 的 Pearson 相关系数为 0.981,且均通过显著性检验。

这说明男女死亡率的相关性主要体现在年龄的自然变化规律和时间的进程中。在预测时,由于两个年龄项

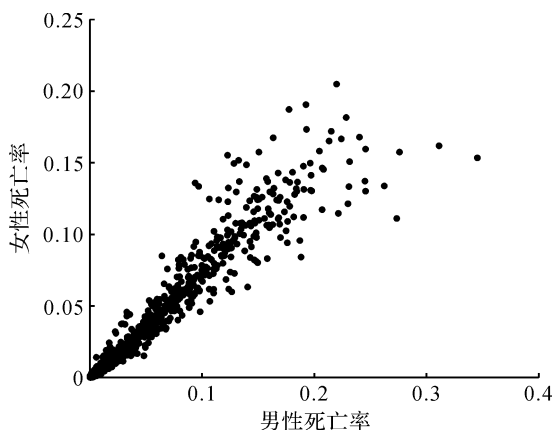


图 2 1994—2017 年男女死亡率散点图

Fig. 2 Scatter plot of male and female mortality from 1994 to 2017

参数保持不变,因此只需建立具有相依性的时间项参数模型即可,这也说明本研究建立的模型是合理的。

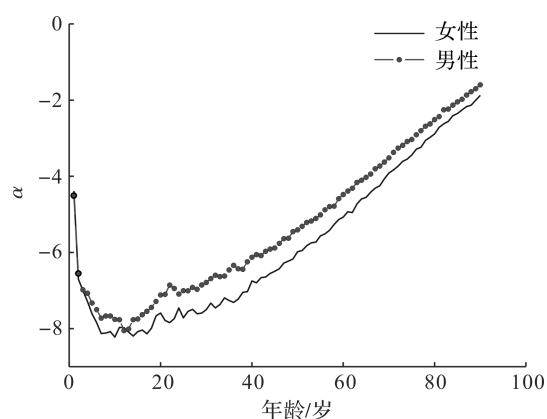


图3 男性与女性的 α 值

Fig. 3 α values for men and women

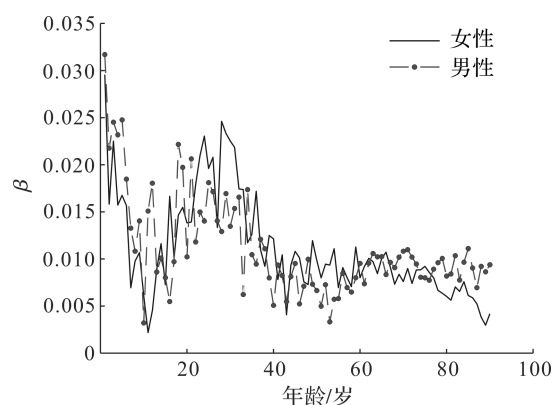


图4 男性与女性的 β 值

Fig. 4 β values for men and women

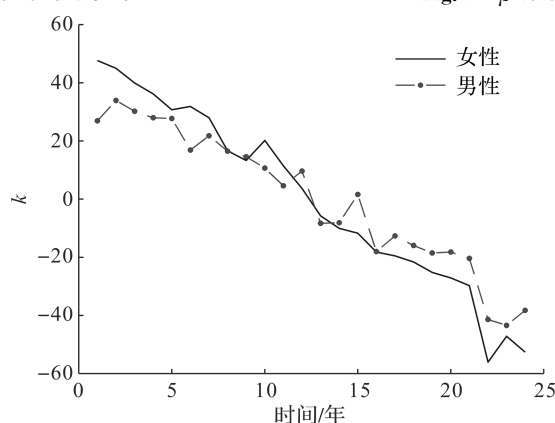


图5 男性与女性的 k 值

Fig. 5 k values for men and women

根据赤池信息准则,男性与女性的 ARIMA(1,1,0)模型效果最好,解得 $\mu^M = -4.739$, $\omega^M = -0.456$, $\omega^F = -0.376$, $\mu^F = -6.055$, $\sigma_{\epsilon_t^M} = 7.137$, $\sigma_{\epsilon_t^F} = 6.265$ 。根据欧氏距离,选择拟合效果最好的 Clayton Copula 作为连接函数,且 $\theta=0.950$ 。

3.3 预测效果

为了检测模型的预测效果,以 1994—2013 年中国男女人口死亡率的数据,通过蒙特卡罗模拟,计算两个模型在未来 5 年的死亡率预测值与实际值的均方误差,结果见表 2。由表 2 可知,两个模型中男性的均方误差在 0.03 以下,女性的均方误差在 0.01 以下,且两个模型的均方误差十分接近。整体而言,原模型的均方误差相比改进模型的均方误差略小,这是由于我们假设了男女死亡率存在相依性,这对个体的拟合效果有细微的影响。

表 2 两个模型未来 5 年的死亡率预测值与实际值的均方误差

Table 2 Mean square error of predicted value and actual value of mortality of two models for next 5 years

模型	性别	2014 年	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年
改进的模型	男	0.007 45	0.019 51	0.022 79	0.025 61	0.013 93
	女	0.003 97	0.007 76	0.004 84	0.007 57	0.002 12
原模型	男	0.007 29	0.019 60	0.022 71	0.025 54	0.013 78
	女	0.003 97	0.007 74	0.004 81	0.007 56	0.002 11

3.4 长寿互换定价

根据国务院规定,男职工年满 60 周岁、女职工年满 55 周岁退休,养老金的支付时间从退休时开始计算,所以养老基金及保险公司所面临的长寿风险,即 60 岁男性与 55 岁女性的长寿风险。

下面以目前 60 岁男性与 55 岁女性为例,假设男女人口比例为 1:1,交易双方约定以 q 远期合约为基础,约定未来 30 年男性与总体每年进行长寿互换,未来 40 年女性每年进行长寿互换。约定面值为 1, $S=0.75$ 。由于较难直接获得死亡率的方差,因此利用蒙特卡罗模拟计算长寿互换价格,步骤如下:

- 1) 产生一组随机数,满足 $(\epsilon_t^M, \epsilon_t^F) \sim C\left(\varphi\left(\frac{\epsilon_t^M}{\sigma_{\epsilon_t^M}}\right), \varphi\left(\frac{\epsilon_t^F}{\sigma_{\epsilon_t^F}}\right)\right)$;
- 2) 将随机数 $(\epsilon_t^M, \epsilon_t^F)$ 代入式(3)中,求得改进的 Lee-Carter 模型中时间项的预测值 k_t^M 和 k_t^F ;
- 3) 由式(1)得到男性、女性及总体 n 年后的中心死亡率预测模型

$$\begin{cases} m_{x,t+n}^M = m_{x,t}^M e^{\beta_x^M (k_{t+n}^M - k_t^M)}, \\ m_{x,t+n}^F = m_{x,t}^F e^{\beta_x^F (k_{t+n}^F - k_t^F)}, \\ m_{x,t+n}^P = \frac{(m_{x,t+n}^M + m_{x,t+n}^F)}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

将时间项分别代入式(6)中,得到男性、女性与总体的中心死亡率,再将其转换为死亡率;

- 4) 将 1)~3) 重复 3 000 次,再计算男性、女性与总体死亡率的方差;
- 5) 将 4) 中得到的方差代入式(5)中,并计算 q 远期合约每年的价格和平均价格。

根据上述步骤得到总人口未来 30 年死亡率风险溢价、55 岁女性未来 35 年死亡率风险溢价和 60 岁男性未来 30 年死亡率风险溢价,如图 6~8 所示。目前 60 岁的男性人口在未来 17 年内的死亡率风险溢价总体呈上升趋势,略有波动;在未来 18 年至 30 年内风险溢价上升趋势相对前 17 年变缓,但是波动频率变大。女性的风险溢价在未来的 20 年呈上升趋势,之后在 0.10 上下波动。

男性的平均风险溢价为 0.077 8,女性的平均风险溢价为 0.088 4,总体的平均风险溢价为 0.077 2,说明在退休之后女性的死亡率不确定性比男性更大。另外,我们计算出女性在未来 30 年的平均风险溢价为 0.082 1,在未来 30 年内,若通过线性相加的方法得到总体的平均风险溢价,那么它介于男性与女性的平均风险溢价之间;而通过本研究方法,总体的平均风险溢价小于男性与女性的风险溢价。这两种方法有显著的区别,这是由于男性与女性的死亡率存在非线性相依关系,以往的线性相加方法将失效。

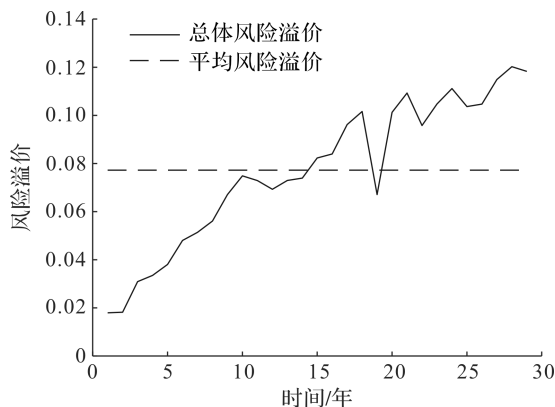


图 6 总人口未来 30 年死亡率风险溢价

Fig. 6 Mortality risk premium for total population for next 30 years

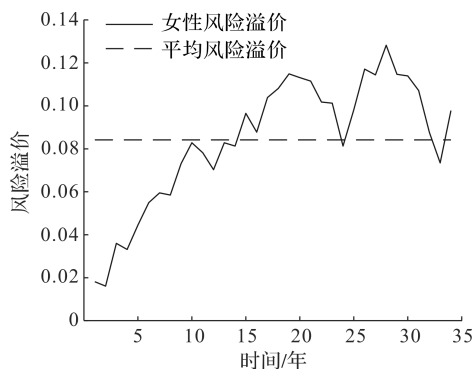


图 7 55 岁女性未来 35 年死亡率风险溢价

Fig. 7 55-year-old female mortality risk premium for next 35 years

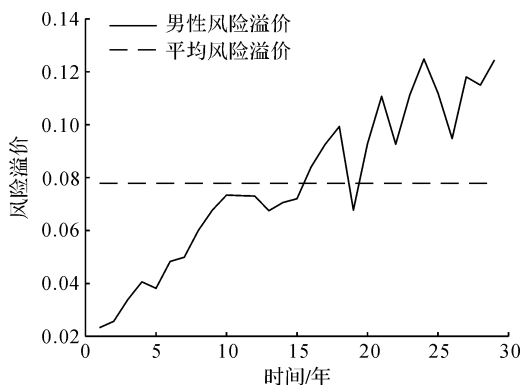


图 8 60 岁男性未来 30 年死亡率风险溢价

Fig. 8 60-year-old male mortality risk premium for next 30 years

3.5 各因素的影响

为分析不同样本周期长度对风险溢价的影响,以目前 65 岁人口为例,以 1994—2016 年为起始时间,

2017 年为终止时间,其他条件固定,计算不同样本周期下的风险溢价,结果如图 9 所示。由图 9 可知,随着周期变长,风险溢价呈波动上升的趋势,由于周期延长,不确定性增加,风险随之增大,风险溢价也随之增大,这是合乎逻辑的。为进一步分析起始年份对风险溢价的影响,以目前 65 岁人口为例,以 1994—2013 年为起始时间,计算不同起始时间下的风险溢价,如图 10 所示。由图 10 可知,不同起始时间也会对风险溢价造成影响,这种影响具有随机性。另外,根据式(5),可以知道 S 对风险溢价的影响是呈线性的;当 σ_q 确定时,互换周期 t 对风险溢价的影响也是呈线性的。

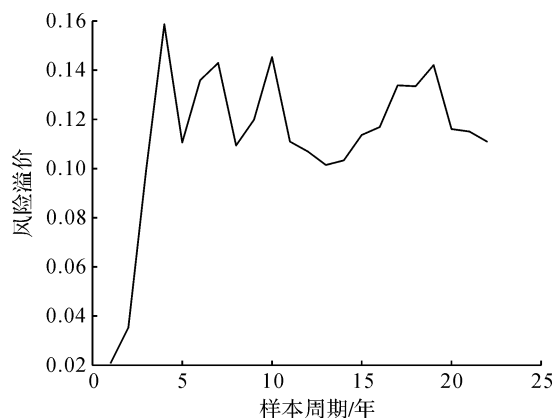


图 9 不同样本周期下的风险溢价

Fig. 9 Risk premium under different sample periods

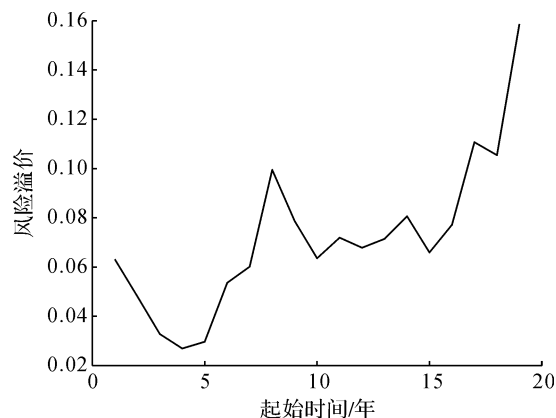


图 10 不同起始时间下的风险溢价

Fig. 10 Risk premium at different starting times

4 结 语

为实现长寿风险证券化,本研究联系实际,建立了具有相依性的 Lee-Carter 模型,并应用 Sharpe 比率定价法对长寿互换定价。在实证分析中更清楚地说明男女死亡率在时间变换进程中的相依关系是事实存在的,对长寿风险定价的影响是显著的。因此,对模型进行 Copula 分析是必要的。同时,本研究也为长寿互换产品的合理定价提供了参考。在此基础上,分析了样本周期、样本的起始时间、Sharpe 比率和长寿互换的期限对长寿互换价格的影响,发现各因素的影响都是显著的,说明应用 Sharpe 比率定价法对长寿互换定价是有效的。在未来,长寿互换产品必将成为连接资本市场与保险市场的重要纽带,该研究可为建立起长寿风险证券化市场提供参考。因此,本研究具有一定的理论价值与现实意义。在未来,我们将进一步研究中国长寿风险市场下 Sharpe 比率的取值,以推进 Sharpe 比率定价模型在中国长寿风险市场的应用。

参考文献:

- [1] RONALD D L, LAWRENCE C. Modeling and forecasting the time series of U. S. mortality[J]. Journal of the American Statistical Association, 1992(87): 659.
- [2] RENSHAW A E, HABERMAN S. A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(3): 556.
- [3] RUSSOLILLO M, GIORDANO G, HABERMAN S, et al. Extending the Lee-Carter model: a three-way decomposition [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2011(2): 96.
- [4] KLEINOW T. A common age effect model for the mortality of multiple populations[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2015(63): 147.
- [5] ENCHEV V, KLEINOW T, CAIRNS A J G. Multi-population mortality models: fitting, forecasting and comparisons[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2017(4): 319.
- [6] 吴晓坤, 王晓军. 中国人口死亡率 Lee-Carter 模型的再抽样估计、预测与应用[J]. 中国人口科学, 2014(4): 27.
- [7] 赵明, 米海杰, 王晓军. 中国人口死亡率变动趋势与长寿风险度量研究[J]. 中国人口科学, 2019(3): 67.
- [8] 柳向东, 范洋洋. 基于均衡关系的中国人口死亡率预测模型[J]. 统计与信息论坛, 2016, 31(10): 3.