杭州应用工程技术学院学报,第11卷第1,2期,1999年6月
Journal of Hangzhou Institute Applied Engineering
Vol.11 No.1,2, June 1999

# 关于 Canchy 中值定理的中值的变化趋势

章迪平
(杭州应用工程技术学院基础部　杭州 310012)

**摘　要**　分别在 $F'_+(a)=0$ 及 $F'_+(a)=\infty$ 的情况下,研究了 Cauchy 中值定理的中值的变化趋势,改进了文献[1]的结果.

**关键词**　Cauchy 中值定理　中值　变化趋势
**中图分类号**　O241.4

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足(1)在$[a,b]$内连续;(2)在$(a,b)$内可导;(3)在$(a,b)$内 $g'(x)\neq 0$. 则在$(a,b)$内至少存在一点 $\xi$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1}$$

这就是Cauchy中值定理[2]. 记 $F(X)=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,文献[1]给出了在 $F'_+(a)\neq 0$ 的情况下,关于中值 $\xi$ 的变化趋势的一个结果,即:

**定理1**　设$f(x)$与$g(x)$满足(1)在$[a,b]$内连续;(2)在$(a,b)$内可导,$F'_+(a)$存在且不等于零,$\lim\limits_{x\to a+0}g'(x)$存在;(3)在$(a,b)$内 $g'(x)\neq 0$. 则(1)中的 $\xi$ 有

$$\lim_{b\to a}\frac{\xi-a}{b-a}=\frac{1}{2} \tag{2}$$

本文将分别在 $F'_+(a)=0$ 及 $F'_+(a)=\infty$ 的情况下,进一步研究 Cauchy 中值定理的中值的变化趋势,并加以推广,从而改进了文献[1]的结果.

## 1　$F'_+(a)=0$ 的情形

当 $F'_+(a)=0$ 时,定理1结论未必成立. 如对 $f(x)=x^4$,$g(x)=x^2$ 在$[0,b]$上使用(1),有 $\dfrac{b^4}{b^2}=\dfrac{4\xi^3}{2\xi}$,$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\xi}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq\dfrac{1}{2}$,这是由于此时 $F'_+(0)=0$.

**定理2**　设$f(x)$与$g(x)$满足(1)在$[a,b]$上连续;(2)在$[a,b)$内可导,$F(x)$具有直到 $n$ 阶

收稿日期:1999-01-19

导数,$F^{(n)}(x)$ 与 $g'(x)$ 在 $x = a$ 处右连续,$F_+^{(i)}(a) = 0(i = 1,2,\cdots,n-1)$,$F_+^{(n)}(a) \neq 0$;(3) 在 $[a,b)$ 内 $g'(x) \neq 0$. 则(1) 中的 $\xi$ 有

$$\lim_{b\to a}\left(\frac{\xi - a}{b - a}\right)^n = \frac{1}{n+1} \tag{3}$$

注:当 $n = 1$ 时,(3) 即为(2). 故定理 2 可看定理 1 的推广.

**证** 记 $F(a) = \dfrac{f'_+(a)}{g'_+(a)}$,考虑极限

$$I = \lim_{b\to a}\frac{f(b) - f(a) - F(a)[g(b) - g(a)]}{[g(b) - g(a)]^{n+1}}$$

一方面,反复运用 L'Hospital 法则有

$$I = \lim_{b\to a}\frac{f'(b) - F(a)g'(b)}{(n+1)[g(b) - g(a)]^n g'(b)}$$

$$= \lim_{b\to a}\frac{F(b) - F(a)}{(n+1)[g(b) - g(a)]^n}$$

$$= \frac{1}{g'_+(a)}\lim_{b\to a}\frac{F'(b)}{(n+1)n[g(b) - g(a)]^{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{F_+^{(n)}(a)}{(n+1)![g'_+(a)]^n} \tag{4}$$

另一方面,由(1) 有

$$I = \lim_{b\to a}\frac{F(\xi) - F(a)}{[g(b) - g(a)]^n} \tag{5}$$

而按 Taylor 公式,当 $b \to a$ 时有

$$F(\xi) = F(a) + \frac{F_+^{(n)}(a)}{n!}(\xi - a)^n + O[(\xi - a)^n] \tag{6}$$

于是,把(6) 代入(5) 得

$$I = \lim_{b\to a}\frac{\frac{F_+^{(n)}(a)}{n!}(\xi - a)^n + O[(\xi - a)^n]}{[g(b) - g(a)]^n}$$

$$= \lim_{b\to a}\frac{\frac{F_+^{(n)}(a)}{n!}\left(\frac{\xi - a}{b - a}\right)^n + \frac{O[(\xi - a)^n]}{(b - a)^n}}{\left[\frac{g(b) - g(a)}{b - a}\right]^n}$$

$$= \frac{F'_+(a)}{n![g'_+(a)]^n}\lim_{b\to a}\left(\frac{\xi - a}{b - 1}\right)^n \tag{7}$$

比较(4) 与(7),即得(3).

## 2　$F'_+(a)=\infty$ 的情形

当 $F'_+(a)=\infty$ 时,定理2的结论未必成立. 如对 $f(x)=x^{\frac{5}{2}}, g(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 在$[0,b]$上使用(1),有 $\dfrac{b^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{5}{2}\xi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\xi^{\frac{1}{2}}}, \lim\limits_{b\to a}\dfrac{\xi}{b}=\dfrac{3}{5}\neq\dfrac{1}{2}$,这是由于此时 $F'_+(0)=\infty$.

**定义**　设 $h(x)$ 在 $x=a$ 的右邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to a+0}[h(x)-h(a)]/(x-a)^\alpha$($\alpha$ 是$(0,1]$中的某个实数)存在,则称这极限为 $h(x)$ 在 $x=a$ 处的 $\alpha$ 导数,记作 $D_\alpha h(a)$.

显然 $D_1 h(a)=h'_+(a)$;而当 $D_\alpha h(a)$ 存在时,$h'(a)$ 未必存在.

**定理 3**　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足(1) 在$[a,b]$内连续;(2) 在$[a,b)$内可导,$D_\alpha F(a)$ 存在且不等于零,$g'(x)$ 在 $x=a$ 处右连续;(3) 在$[a,b)$内 $g'(x)\neq 0$. 则(1) 中的 $\xi$ 有

$$\lim_{b\to a}\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^\alpha=\frac{1}{1+\alpha} \tag{8}$$

注:当 $\alpha=1$ 时,(8) 即为定理 1 的结果.

**证**　考察极限

$$I=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)-F(a)[g(b)-g(a)]}{[g(b)-g(a)]^{1+\alpha}}$$

一方面,由 L'Hospital 法则有

$$I=\lim_{b\to a}\frac{f'(b)-F(a)g'(b)}{(1+\alpha)[g(b)-g(a)]^\alpha g'(b)}$$

$$=\lim_{b\to a}\frac{F(b)-F(a)}{(1+\alpha)[g(b)-g(a)]^\alpha}$$

$$=\frac{D_\alpha F(a)}{(1+\alpha)[g'_+(a)]^\alpha} \tag{9}$$

另一方面,按广义 Taylor 公式[3],当 $b\to a$ 时有

$$F(\xi)=F(a)+D_\alpha F(a)(\xi-a)^\alpha+O[(\xi-a)^\alpha] \tag{10}$$

于是,相继由(1),(10) 得

$$I=\lim_{b\to a}\frac{F(\xi)-F(a)}{[g(b)-g(a)]^\alpha}$$

$$=\lim_{b\to a}\frac{D_\alpha F(a)(\xi-a)^\alpha+O[(\xi-a)^\alpha]}{[g(b)-g(a)]^\alpha}$$

$$=\frac{D_\alpha F(a)}{[g'_+(a)]^\alpha}\lim_{b\to a}\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^\alpha \tag{11}$$

由(9) 与(11) 相等,即得(8). 类似地可以证明下列更为一般的

**定理 4**　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足(1) 在$[a,b]$内连续;(2) 在$[a,b)$内可导,$F(x)$ 具有直到 $n-1$ 阶导数,$F_+^{(i)}(a)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$,$D_\alpha F^{(n-1)}(a)$ 存在且不等于零,$g'(x)$ 在 $x=a$ 处右连

续;(3) 在$[a,b)$内$g'(x)\neq 0$. 则(1)中的$\xi$有

$$\lim_{b\to a}\left(\frac{\xi-a}{b-a}\right)^{n-1+\alpha}=\frac{1}{n+\alpha} \tag{12}$$

## 参 考 文 献

1 张广梵．关于微分中值定理的一个注记．数学的实践和认识,1988,(1):87~89

2 菲赫金哥尔茨 P M. 微积分学教程:第1卷．第1分册．北京:人民教育出版社,1959.225~226

3 孙燮华．关于Taylor公式的推广及其应用．数学的实践和认识,1995(4):86~89

# On the Asymptotic State of the Mean Value for Cauchy Mean Value Theorem

Zhang Diping

(Dept. of Basic Sci. Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

**Abstract** When $F'_+(a)=0$ and $F'_+(a)=\infty$, the asymptotic state of the mean value for Cauchy mean value theorem is studied in this paper respectively, which improves the result in [1].

**Key words** canchy mean value theorem mean value asymptotic state