杭州应用工程技术学院学报,第11卷第4期,1999年12月
Journal of Hangzhou Institute of Applied Engineering
Vol.11 No.4, December 1999

洛仑兹曲线与基尼系数

章迪平　　　　范良辉
(杭州应用工程技术学院基础部　杭州 310012)　　(浙江大学)

摘　要　分析了基尼(Gini)系数不能准确地反映洛仑兹(Lorenz)曲线的形状和收入分配的不公平程度这一问题,并在此基础上引进了三个参数 V_σ、λ、和 $\Gamma(\lambda)$. Gini 系数和这三个参数一起就能很好地刻划 Lorenz 曲线的形状,从而能较好地反映出收入分配的不公平程度. 本文还给出了 V_σ、λ 和 $\Gamma(\lambda)$ 的简便实用的估算公式和具体的例子.

关键词　收入分配　公平程度　Lorenz 曲线　Gini 系数
中图分类号　F222

公平收入分配作为政府宏观经济政策的目标之一,对经济发展、社会稳定和改革的深入有着至关重要的影响. 经济统计中对测定社会收入分配的不均等程度的情形,人们通常采用洛仑兹(Lorenz)曲线与基尼(Gini)系数来度量. 基尼系数是联合国规定的衡量各国社会经济发展的统计指标之一,用它来测定各国和各地区、各种族、各行业收入分配的不均等程度;许多国家也用它来衡量财政政策、税收政策对居民收入分配有何影响及影响程度. 本文将揭示其缺陷并提出了弥补的方法和相应的计算公式.

1　洛仑兹(Lorenz)曲线

洛仑兹曲线最早是由美国经济统计学家 M.Lorenz 为研究财富、土地和工资收入的分配是否公平而提出的.

设收入变量 u 的分布密度函数为 $\rho(u)$(即收入为 u 的人口数占总人口数的百分比为 $\rho(u)$),总人口数为 N,则收入少于 t 的人口数为 $\int_0^t N\rho(u)\mathrm{d}u$,它占总人口数的百分比为:

$$P(t) = \frac{\int_0^t N\rho(u)\mathrm{d}u}{N} = \int_0^t \rho(u)\mathrm{d}u$$

收入少于 t 的所有人数的收入之和(称累积收入)为 $\int_0^t uN\rho(u)\mathrm{d}u$,它在总收入中的比重为:

收稿日期:1999-05-17

$$I(t)=\frac{\int_0^t uN\rho(u)\mathrm{d}u}{\int_0^{\infty} uN\rho(u)\mathrm{d}u}=\frac{1}{\mu}\int_0^t u\rho(u)\mathrm{d}u$$

其中 $\mu=\int_0^{\infty} u\rho(u)\mathrm{d}u$ 是收入 u 的期望值或社会总的平均收入.

由参数方程

$$\begin{cases}P=P(t)=\int_0^t \rho(u)\mathrm{d}u \\ I=I(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^t u\rho(u)\mathrm{d}u\end{cases}\quad(t\geqslant 0)$$

决定的曲线称为洛仑兹曲线,见图 1. 它的横轴为 P,表示累计人口数占总人口数的百分比,纵轴为 I,表示累计收入占总收入的百分比.

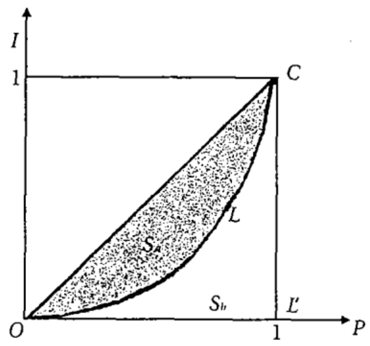

图 1　洛仑兹曲线

洛仑兹曲线具有以下性质:

(1) $P(0)=0, I(0)=0$, 即 0% 的人口的收入占总收入的 0%;而 $P(\infty)=1, I(\infty)=1$,即 100% 的人口的收入占总收入的 100%.

(2) 洛仑兹曲线是递增的. 因为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}P}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{t\rho(t)}{\mu\rho(t)}=\frac{t}{\mu}\geqslant 0$$

(3) 洛仑兹曲线是下凸的. 因为

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}P^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}P})}{\mathrm{d}P}=\frac{\mathrm{d}(\frac{t}{\mu})}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\mu\rho(t)}\geqslant 0$$

(4) 当洛仑兹曲线为 45° 角的 OC 线时,人口比重增加一个单位,相应的收入比重也增加一个单位,这表明每个人的收入都相同,即收入分配是绝对平均的. 直线 OC 称为绝对平均线.

(5) 当洛仑兹曲线为 $OL'C$ 折线时,人口比重在增加到 100% 前,收入比重始终保持 0 不变,当人口比重一达到 100%,收入比重马上达到 100%,这表明所有收入集中在一个人手中,而其他人的收入都为零,即社会收入分配是绝对不平均的. $OL'C$ 折线称为绝对不平均线.

(6) 由性质(1)、(2) 可见:洛仑兹曲线其实是一条分布曲线,洛仑兹函数 $I=I(P)$ 是一个分布函数.

现实中的洛仑兹曲线是一条介于绝对平均线 OC 和绝对不平均线 $OL'C$ 之间的一条曲线,如上图中的 OLC 线.

2　基尼(Gini) 系数

基尼系数是意大利经济学家 C.Gini 提出的,它是在洛仑兹曲线基础上,进一步计算其收入分配差异程度的. Gini 系数 G 的计算公式如下:

$$G=\frac{S_a}{S_a+S_b}=2S_a=2(\frac{1}{2}-\int_0^1 I(P)\mathrm{d}P)=1-2I(P)P\,|_0^1+2\int_0^1 P\mathrm{d}I(P)=2E[I(P)]-1$$

其中 S_a、S_b 分别表示洛仑兹曲线 OLC 与绝对平均线 OC、洛仑兹曲线 OLC 与绝对不平均线 $OL'C$ 所围成的面积. 由上面的计算公式可知,Gini 系数 G 是分布函数 $I(P)$ 的某种平均值.

当 $G=0$ 时，$S_a=0$，表明洛仑兹曲线与绝对平均线重合，因而此时的收入分配是绝对平均的；当 $G=1$ 时，$S_b=0$，表明洛仑兹曲线与绝对不平均曲线重合，因而此时的收入分配是绝对不平均的，所有的收入都集中在一个人手中[1]．显然 $0\leqslant G\leqslant 1$．

由 Gini 系数的计算公式得知：Gini 系数的值完全取决于洛仑兹曲线与绝对平均线之间的面积的大小，而对于不同的洛仑兹曲线，这块面积可能是相同的，即对于不同的洛仑兹曲线，可能有相同的 Gini 系数[2]．因此 Gini 系数不能准确的反映洛仑兹曲线的形状，从而它不能精确地反映收入分配的不均等程度；Gini 系数仅反映了洛仑兹曲线的某种均值性质，它并没有反映出洛仑兹函数对该种均值的离散程度及洛仑兹函数的峰值、偏态等性质[3]．社会分配的不均等程度是由两种收入分配间的差距造成的，一种是由收入低于整个社会的平均收入而造成的，即社会低收入者感受到的收入分配之间的差距；另一种是由收入高于整个社会的平均收入而形成的差距，即社会高收入者感受到的社会收入分配之间的差距．Gini 系数是这两种差距的总和，它没有反映出这两种差距各自的大小程度，而这两种差距显然是不同性质的，需要加以区别[4]．所以要能准确地反映收入分配的差异程度和洛仑兹曲线的形状，除了 Gini 系数外，还需要其他统计量．

(1) 标准差的变异系数：

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{\mu},$$

其中 σ 为收入 u 的标准差．V_σ 反映了收入相对于平均收入的离散程度，其值越小，说明收入越集中在平均收入附近，即收入分配越均匀．

(2) 收入低于平均收入的人口数占总人口数的百分比：

$$\lambda=\frac{\int_0^\mu N\rho(u)\mathrm{d}u}{N}=\int_0^\mu\rho(u)\mathrm{d}u$$

由洛仑兹曲线的性质(2)和性质(3)知，在 $P=\lambda$ 处，洛仑兹曲线的切线与 OC 线平行，这说明 λ 反映了洛仑兹曲线的偏态情况，λ 越大，洛仑兹曲线就越偏向左上角；同时，$\Gamma(P)=|P-I(P)|$ 在 $P=\lambda$ 处取到最大值，而且 $P=\lambda$ 是 $\Gamma(P)$ 唯一的一个最大值点．$\Gamma(P)$ 是 $P\%$ 的人口的实际收入与公平(平均)收入两者之间的差距，$\Gamma(\lambda)$ 为洛仑兹曲线与绝对平均线之间的纵坐标之差的最大值，$\Gamma(\lambda)$ 越大，洛仑兹曲线越远离绝对平均线，这说明 $\Gamma(\lambda)$ 是关于洛仑兹曲线的峰值的一种度量．如图 2

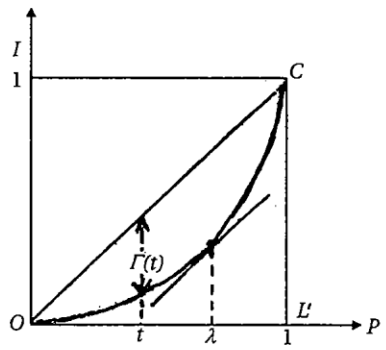

图 2 洛仑兹曲线的偏态情况

3 Gini 系数，V_σ、λ 和 $\Gamma(\lambda)$ 的计算

在实际生活中，常常是把统计资料按收入水平从低到高分成若干个组，依次把它们记为第一组、第二组、…、第 n 组．设第 i 组的人口占总人口的百分比为 P_i，该组的收入占总收入的百分比为 I_i，分别计算出第一组、第二组、…、第 n 组的累计人口百分比和累计收入百分比，在图上画出这些点，然后把它们联成线，即得到洛仑兹曲线，如图 3．

此时，有

$$S_a=\frac{1}{2}(P_1I_1+P_2I_2+\cdots+P_nI_n)+P_1(I_2+I_3+\cdots+I_n)+$$
$$P_3(I_3+I_4+\cdots+I_n)+\cdots+P_{n-1}I_n-\frac{1}{2}\times1\times1$$

若记 $S_1 = I_1$，$S_2 = I_1 + I_2, \cdots$，$S_{n-1} = I_1 + I_2, + \cdots + I_{n-1}$，则得 Gini 系数 G 的计算公式：

$$G = 2S_a = \sum_{i=1}^{n} P_i I_i + 2\sum_{i=1}^{n-1} P_i(1 - S_i) - 1$$

利用洛仑兹曲线的性质和上面关于 λ 的说明，可知：当 $P = \lambda$ 时，$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}P} = 1$，并且

$$\frac{I_1}{P_1} \leqslant \frac{I_2}{P_2} \leqslant \cdots \leqslant \frac{I_n}{P_n}$$

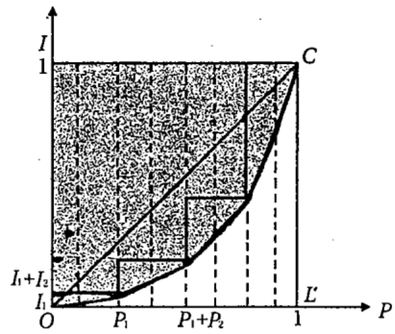

图 3　洛仑兹曲线的形成

因此对于 λ 和 $\Gamma(\lambda)$ 采用如下的估计式：

设 $\frac{I_k}{P_k} \leqslant 1$，而 $1 \leqslant \frac{I_{k+1}}{P_{k+1}}$，因 $\frac{I_1}{P_1} \leqslant 1 \leqslant \frac{I_n}{P_n}$，故这样的 k 总是存在的，则 λ 的近似值 $\overline{\lambda}$ 为

$$\overline{\lambda} = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$$

$\Gamma(\lambda)$ 的近似值 $\overline{\Gamma(\lambda)}$ 为

$$\overline{\Gamma(\lambda)} = \overline{\lambda} - (I_1 + I_2 + \cdots + I_k) = P_1 + P_2 + \cdots + P_k - (I_1 + I_2 + \cdots + I_k)$$

至于 V_σ 的近似值，用一般的估计均值和标准差的方法即可获得．

4　实　例

现举例说明本文的结果．见表 1．

表 1　两种不同情况中的 Gini 系数与 $\overline{\lambda}$ 值

组号(i)		1	2	3	Gini 系数	$\overline{\lambda}$
情况 ①	收入 I_i	1/6	3/6	2/6	13/36	3/6
	人口 P_i	3/6	2/6	1/6		
情况 ②	收入 I_i	1/6	2/6	3/6	13/36	5/6
	人口 P_i	2/6	3/6	1/6		

此例中，情况 ①、情况 ② 的洛仑兹曲线分别见图 4、图 5．两洛仑兹曲线有明显的差别，但其 Gini 系数却是一样的，而从 $\overline{\lambda}$ 来分析，便知情况 ② 的洛仑兹曲线比情况 ① 的洛仑兹曲线偏向上，情况 ② 中低于平均收入的人口比重大．

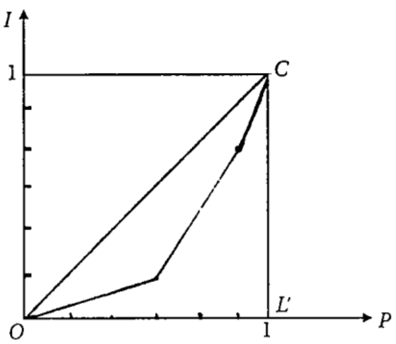

图 4　情况 ① 的洛仑兹曲线

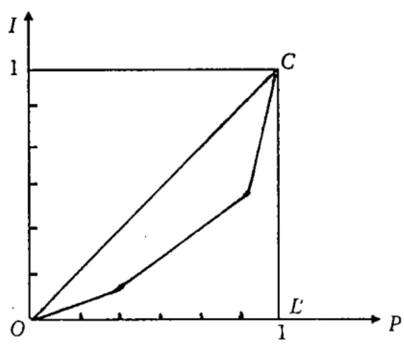

图 5　情况 ② 的洛仑兹曲线

5 结　论

洛仑兹曲线很好地反映了收入分配的差异程度,但Gini系数不能准确地反映洛仑曲线的形状,从而不能准确地反映收入分配的差异程度. $V\sigma$、λ 和 $\Gamma(\lambda)$ 能弥补 Gini 系数的缺陷,Gini 系数加上 $V\sigma$、λ 和 $\Gamma(\lambda)$ 就能较好地反映洛仑兹曲线的性质和收入分配的差异程度.

参 考 文 献

1 聂皖生 . 公平收入分配测定方法研究 . 财贸研究,1994,(1):40~43

2 周　方 . 关于基尼系数 . 数量经济技术经济研究,1993,(6):45~51

3 岑成德 . 基尼系数不能衡量收入分配的公平程度和平等程度. 统计研究,1992,(3):56~59

4 蒋　萍 . 地区居民收入差异特征及量化方法. 统计研究,1992,(1):38~40

Lorenz curve and Gini coefficient

Zhang Diping　　　　Fan Lianghui

(Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)　(Zhejiang University)

Abstract The problem, which Gini coefficient cannot reflect the shape of lorenz curve and the fairness of income distribution exactly, is investigated and three coefficient are introduced, V_σ、λ and $\Gamma(\lambda)$. Gini coefficient, along with the three coefficient, is capable of outlining the shape of Lorenz curve, reflecting the fairness of income distribution. Moreover, there are convenient and practical formulas to estimate V_σ、λ and $\Gamma(\lambda)$ as well as example.

Key words income distribution　fairness　Lorenz curve　Gini coefficient