杭州应用工程技术学院学报,第 12 卷第 1 期,2000 年 3 月
Journal of Hangzhou Institute of Applied Engineering
Vol.12 No.1, March 2000

关于 n 元连续函数为凸函数的条件

章迪平
(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘　要　对文献[3]进行了推广,得到了 n 元连续函数为凸函数的两个条件.

关键词　凸函数　凸集　连续函数
中图分类号　O241.1

文献[1]、[2] 分别指出了连续函数 $f(x)$ 为区间 I 上的凸函数的两个充分必要条件:

1°　$\forall x, x_0 \in I$,恒有

$$f(x) \geqslant f(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

这里 $\lambda(x)$ 为 I 上的实函数.

2°　$\forall x_0,\ h > 0,\ x_0 - h,\ x_0 + h \in I$,恒有

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}[f(x_0 - h) + f(x_0 + h)] \tag{2}$$

文献[3] 在此基础上,获得了二元函数的以下结论:

3°　连续函数 $f(x,y)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 上的凸函数的充分必要条件为:$\forall (x,y),\ (x_0,y_0) \in D$,恒有

$$f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) + \lambda_1(x_0)(x - x_0) + \lambda_2(y_0)(y - y_0) \tag{3}$$

这里 $\lambda_1(x), \lambda_2(y)$ 是 D 上的实函数.

命题 4°　设连续函数 $f(x,y)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^2$ 内的凸函数,$\forall (x_0,y_0) \in D$,记 D 内以 (x_0,y_0) 为圆心的任意闭圆域为 $\sigma: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2$,$S$ 为 σ 的边界,则

$$f(x_0,y_0) \leqslant \frac{1}{\pi R^2}\iint_\sigma f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2\pi R}\int_s f(x,y)\mathrm{d}S \tag{4}$$

本文通过分析,对文献[3] 作了进一步的推广,得到 n 元函数的类似结论.

定义　设 $f(x)$ 为定义在非空凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上的实值连续函数,若 $\forall x', x'' \in D$,以及实数 μ_1, $\mu_2 \in (0,1)$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$,恒有

$$f(\mu_1 x' + \mu_2 x'') \leqslant \mu_1 f(x') + \mu_2 f(x'')$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的凸函数.

收稿日期:1999－07－07

1 三元连续函数的情形

定理1 设 $f(x,y,z)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^3$ 上的连续函数，则 $f(x,y,z)$ 为 D 上的凸函数的充分必要条件为：$\forall (x,y,z),(x_0,y_0,z_0) \in D$，恒有

$$f(x,y,z) \geqslant f(x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(x_0)(x-x_0) + \lambda_2(y_0)(y-y_0) + \lambda_3(z_0)(z-z_0) \tag{5}$$

这里 $\lambda_1(x),\lambda_2(y),\lambda_3(z)$ 是 D 上的实函数.

证明 必要性：$\forall \mu_1,\mu_2 \in (0,1)$，$\mu_1+\mu_2=1$，记 $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}$，以及

$$H_1(X) = f(X, y_0 + \frac{y-y_0}{x-x_0}(X-x_0), z_0 + \frac{z-z_0}{x-x_0}(X-x_0)),$$

则

$$H_1(\mu_1x_1+\mu_2x_2) = f(\mu_1x_1+\mu_2x_2, y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(\mu_1x_1+\mu_2x_2-x_0), z_0+\frac{z-z_0}{x-x_0}(\mu_1x_1+\mu_2x_2-x_0)) =$$

$$f(\mu_1x_1+\mu_2x_2, \mu_1(y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(x_1-x_0)) + \mu_2(y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(x_2-x_0)),$$

$$\mu_1(z_0+\frac{z-z_0}{x-x_0}(x_1-x_0)) + \mu_2(z_0+\frac{z-z_0}{x-x_0}(x_2-x_0))) \leqslant$$

$$\mu_1 f(x_1, y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(x_1-x_0), z_0+\frac{z-z_0}{x-x_0}(x_1-x_0)) +$$

$$\mu_2 f(x_2, y_0+\frac{y-y_0}{x-x_0}(x_2-x_0), z_0+\frac{z-z_0}{x-x_0}(x_2-x_0)) = \mu_1H_1(x_1)+\mu_2H_1(x_2)$$

因此，由凸函数的定义知，$H_1(X)$ 是凸函数.
类似地，若令

$$H_2(Y) = f(x_0+\frac{x-x_0}{y-y_0}(Y-y_0), Y, z_0+\frac{z-z_0}{y-y_0}(Y-y_0)),$$

$$H_3(Z) = f(x_0+\frac{x-x_0}{z-z_0}(Z-z_0), y_0+\frac{y-y_0}{z-z_0}(Z-z_0), Z),$$

则同样可证得 $H_2(Y),H_3(Z)$ 均为凸函数.

又 $H_1(x_0)=H_2(y_0)=H_3(z_0)=f(x_0,y_0,z_0)$，且由(1)知，当 X,Y,Z 满足 $\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}$ 时，有

$$f(X,Y,Z) = H_1(X) \geqslant H_1(x_0) + 3\lambda_1(x_0)(X-x_0)$$
$$f(X,Y,Z) = H_2(Y) \geqslant H_2(y_0) + 3\lambda_2(y_0)(Y-y_0)$$
$$f(X,Y,Z) = H_3(Z) \geqslant H_3(z_0) + 3\lambda_3(z_0)(Z-z_0)$$

于是，得

$$f(X,Y,Z) \geqslant f(x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(x_0)(X-x_0) + \lambda_2(y_0)(Y-y_0) + \lambda_3(z_0)(Z-z_0) \tag{6}$$

在(6)中，令 $X=x,Y=y,Z=z$，即得(5).

充分性：$\forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in D$，以及实数 $\mu_1,\mu_2 \in (0,1)$，$\mu_1+\mu_2=1$，由(5)知

$$f(x_1,y_1,z_1) \geqslant f(x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(x_0)(x_1-x_0) + \lambda_2(y_0)(y_1-y_0) + \lambda_3(z_0)(z_1-z_0) \tag{7}$$

$$f(x_2,y_2,z_2) \geqslant f(x_0,y_0,z_0) + \lambda_1(x_0)(x_2-x_0) + \lambda_2(y_0)(y_2-y_0) + \lambda_3(z_0)(z_2-z_0) \tag{8}$$

若取 $x_0 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, y_0 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, z_0 = \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2$，则

$$\mu_1(x - x_0) = -\mu_2(x_2 - x_0), \mu_1(y_1 - y_0) = -\mu_2(y_2 - y_0), \mu_1(z_1 - z_0) = -\mu_2(z_2 - z_0),$$

从而，由(7)，(8)得

$$\mu_1 f(x_1, y_1, z_1) + \mu_2 f(x_2, y_2, z_2) \geqslant f(x_0, y_0, z_0) = f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2)$$

因此，$f(x, y, z)$ 是 D 上的凸函数．证毕．

定理2　设连续函数 $f(x, y, z)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^3$ 上的凸函数，$\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$，记 D 内以 (x_0, y_0, z_0) 为球心的任意闭球域为 $\Omega: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant R^2$，$S$ 为 Ω 的边界面，则

$$f(x_0, y_0, z_0) \leqslant \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_\Omega f(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{4\pi R} \iint_S f(x, y, z) \mathrm{d}S \tag{9}$$

上述定理2说明了凸函数在一点的函数值与邻近区域及边界面上的函数均值间的关系．

证明　因 $f(x, y, z)$ 为 D 上的凸函数，故由(5)知，

$$f(x, y, z) \geqslant f(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(x_0)(x - x_0) + \lambda_2(y_0)(y - y_0) + \lambda_3(z_0)(z - z_0)$$

将不等式两边在 Ω 上积分并利用 Ω 关于 $(x - x_0)$，$(y - y_0)$ 及 $(z - z_0)$ 的对称性，得

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) \mathrm{d}\Omega \geqslant \iiint_\Omega f(x_0, y_0, z_0) \mathrm{d}\Omega + 0 + 0 = \frac{4}{3}\pi R^3 f(x_0, y_0, z_0)$$

即

$$f(x_0, y_0, z_0) \leqslant \frac{3}{4\pi R^3} \iiint_\Omega f(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

现令

$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\varphi\cos\theta & 0 \leqslant r \leqslant R \\ y = y_0 + r\sin\varphi\sin\theta & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ z = z_0 + r\cos\varphi & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

则由凸函数的定义，有

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & f\Big(\frac{r}{R}(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta) + \frac{R - r}{R}x_0, \frac{r}{R}(y_0 + R\sin\varphi\sin\theta) + \frac{R - r}{R}y_0, \\ & \frac{r}{R}(z_0 + R\cos\varphi) + \frac{R - r}{R}z_0\Big) \leqslant \\ & \frac{r}{R}f(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta, y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, z_0 + R\cos\varphi) + \frac{R - r}{R}f(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \tag{10}$$

又由(5)得

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) \leqslant {} & f(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta, y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, z_0 + R\cos\varphi) - \\ & \lambda_1(x_0)R\sin\varphi\cos\theta - \lambda_2(y_0)R\sin\varphi\sin\theta - \lambda_3(z_0)R\cos\varphi \end{aligned}$$

代入(10)并经整理后，得

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \leqslant {} & f(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta, y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, z_0 + R\cos\varphi) - \\ & (R - r)[\lambda_1(x_0)\sin\varphi\cos\theta + \lambda_2(y_0)\sin\varphi\sin\theta + \lambda_3(z_0)R\cos\varphi] \end{aligned}$$

将不等式两边在 Ω 上积分并注意到 $\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0$，以及 $\int_0^\pi\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 0$，则有

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega f(x, y, z) \mathrm{d}\Omega = {} & \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^R f(x, y, z) r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \leqslant \\ & \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi f(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta, y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, z_0 + R\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{11}$$

而

$$\iint_S f(x, y, z) \mathrm{d}S = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi f(x_0 + R\sin\varphi\cos\theta, y_0 + R\sin\varphi\sin\theta, z_0 + R\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

代人(11),得

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}\Omega \leqslant \frac{R}{3}\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

于是,有

$$\frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \leqslant \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{S} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

定理2证毕.

2 n 元连续函数的情形

参照定理1,定理2的证法,可以类似地证明以下关于 n 元连续函数为凸函数的两个条件.

定理3 设 $f(x)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上的连续函数,则 $f(x)$ 为 D 上的凸函数的充分必要条件是:$\forall x, x^{(0)} \in D$,记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$,恒有

$$f(x) \geqslant f(x^{(0)}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i^{(0)})(x_i - x_i^{(0)}) \tag{12}$$

这里 $\lambda_i(x)(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 D 上的实函数.

定理4 设连续函数 $f(x)$ 为凸集 $D \subset \boldsymbol{R}^n$ 上的凸函数,$\forall x^{(0)} \in D$,记 D 内以 $x^{(0)}$ 为球心的任意闭球域为 $\Omega:(x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 + \cdots + (x_n - x_n^{(0)})^2 \leqslant R^2$,$S$ 为 Ω 的边界面,则

$$f(x^{(0)}) \leqslant \frac{1}{V_n}\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \leqslant \frac{1}{S_n}\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S} f(x)\mathrm{d}S \tag{13}$$

其中 $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}R^n$ 表示 Ω 的体积,$S_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}R^{n-1}$ 表示 Ω 的边界面 S 的面积[4].

参 考 文 献

1 张占通.关于凸函数的两个充分条件.工科数学,1992,(4):93~95

2 张占通等.连续函数为凸函数的两个充要条件.工科数学,1994,(3):128~131

3 杨志荣等.关于二元连续函数为凸函数的两个条件.无锡轻工业大学学报,1997,(1):81~84

4 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程:第三卷,第二分册.吴亲仁等译.北京:人民教育出版社,1957,403~404

The conditions for *n* variables continuous function of convex function

Zhang Diping

(Department of Basic Courses, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract This paper extends and improves the Ref[3]. Furthmore, two conditions, which continuous function of n variables is convex functions, are obtained.

Key words convex function convex set continuous function