杭州应用工程技术学院学报,第12卷第2期,2000年6月
Journal of Hangzhou Institute of Applied Engineering
Vol.12 No.2, June 2000

# 椭圆型方程边值问题的一种近似解法

周轩伟
(温州大学 数学系 温州 325027)

**摘 要** 给出解椭圆型方程 $\Delta u + \lambda a u = v$ 在条件 $u|_\Gamma = 0$ 下的边值问题的一种近似方法,并给出了近似解的误差估计.

**关键词** 椭圆型方程 边值问题 近似解 误差估计
**中图分类号** O175.25

考虑椭圆型方程
$$\Delta u + \lambda a u = v \tag{1}$$
在条件
$$u|_\Gamma = 0 \tag{2}$$
下的边值问题,其中(1)中的 $u$ 属于由曲线 $\Gamma$ 所围成的区域 $D$,当 $\lambda$、$a$、$v$ 满足一定的条件下,它的存在性和唯一性已被详细地讨论过[1],并有多种近似求解方法,文献[2]中讨论了方程(1)(2)的有限元方法,文献[3]中给出了这个方程的高精度算法,文献[4]中讨论了这种方程的边界元方法,而本文则给出了方程(1)(2)当 $a$、$v \in C^\alpha(\bar{D})$[1] 时的一种近似解法,并给出了近似解的误差估计.

## 1 定义和引理

有关Holder空间 $C^{k,\alpha}(\bar{D})(0<\alpha<1)$ 和Sobolev空间 $W^{k,p}(D)$、$W_0^{k,p}(D)$ 的定义见文献[1]. 本文的近似解方法及其误差估计建立在下面的三个引理之上.

**引理 1**[1] 如果 $u$ 是方程 $\Delta u = f, u|_\Gamma = 0$ 的解,其中 $\Gamma$ 是光滑曲线,而 $f \in C^\alpha(\bar{D})(0<\alpha<1)$,则 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$,即存在常数 $C$,使得
$$|u|_{2,\alpha;D} \leqslant C|f|_{\alpha;D} \tag{3}$$

众所周知,对一个或多个变量函数而言,函数具有某种可微性质就同时保证了用代数多项式来逼近该函数的可能性. 由逼近论中的结果有[5]

**引理 2** 设 $\Gamma$ 是由方程 $\omega(x,y)=0$ 所确定的闭曲线,其中 $\omega$ 是分段连续可微函数而且
$$\omega(x,y) \geqslant 0 \quad ((x,y)\in D), \mathrm{grad}\,\omega(x,y) \neq 0 \quad ((x,y)\in\Gamma)$$
这里的 $D$ 表示由曲线 $\Gamma$ 所围成的区域,那么形如 $\tilde{u}(x,y) = \omega(x,y)P(x,y)$ ($P(x,y)$ 为多项式)的函数系在空间 $W_0^{1,2}(\bar{D})$ 中是完全的.

引理 3 设函数 $\omega$ 满足引理2的条件且 $\omega$、$u \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$,那么存在次数不超过 $n$ 的多项式序

收稿日期:1999-09-08

列$\{P_n\}$,使得 $\| u - \omega P \|_{C^{(r)}} = O(\frac{1}{n^{k+\alpha-r}})$

其中 $\| u \|_{C^{(r)}} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{v_1+v_2=i} \max_{D} | \frac{\partial^i u}{\partial x^{v_1} \partial y^{v_2}} |$, $O(\frac{1}{n^{k+\alpha-r}})$ 表示与$\frac{1}{n^{k+\alpha-r}}$等价的无穷小.

## 2 近似解的方法和误差估计

寻求边值问题(1)(2)的形如

$$\tilde{u}(x,y) = \omega(x,y)P(x,y) \tag{4}$$

的近似解,其中 $P$ 是次数不超过 $N$ 的多项式,而 $\omega$ 是满足引理 3 当 $k = 1$ 时的条件.

设空间 $U$ 是由在 $\Gamma$ 上变为零的二次连续可微函数 $u$ 组成的,$U$ 中的距离和内积由公式

$$\| u \| = [\iint_D | \Delta u |^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}}, \quad (u_1, u_2) = \iint_D \Delta u_1 \Delta u_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定义. 取形如 $\tilde{u}$ 的函数集合作为子空间 $\tilde{U}$.

取形如 $v = \Delta u (u \in U)$ 的函数组成的空间作为 $V$,即 $V$ 是由使得方程 $\Delta u = v$ 具有属于 $U$ 的解的函数 $v$ 所组成的空间. 空间 $V$ 中的距离取为 Hilbert 空间 $L^2(D)$ 中的距离. 最后,取所有形如 $\tilde{v} = \Delta\tilde{u} (\tilde{u} \in \tilde{U})$ 的函数组成空间 $\tilde{V}$.

在这样的定义之下,已知的边值问题可看作形如

$$Ku \equiv Gu + \lambda Tu = v \quad (Gu = \Delta u;\ Tu = au) \tag{5}$$

的泛函方程,算子 $G$ 是从 $U$ 到 $V$ 的等距映射.

现在,从 $\tilde{V}$ 中任意取出 $N$ 个线性独立函数组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$. 例如可取

$$\xi_{ij} = \Delta[\omega(x,y)x^i y^j] \quad (i + j \leqslant n)$$

(4) 式中多项式 $P$ 的系数由方程组(6) 确定.

$$\iint_D (\Delta\tilde{u} + \lambda a\tilde{u})\xi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D v\xi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (k = 1,2,\cdots,N) \tag{6}$$

如果把 $\Phi$ 看作是从 $V$ 到 $\tilde{V}$ 的正交投影变换,那么 $\Phi v = 0$ 等价于

$$(v, \xi_k) = \iint_D v\xi_k \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,N)$$

方程组(6) 在新的记号下可写成

$$\Phi G\tilde{u} + \lambda\Phi T\tilde{u} = \Phi v \tag{7}$$

由于 $G\tilde{u} \in \tilde{V}$,故上式即为

$$\tilde{K}\tilde{u} \equiv G\tilde{u} + \lambda\Phi T\tilde{u} = \Phi v \tag{8}$$

设 $u^*$ 和 $\tilde{u}^*$ 分别是方程(5) 与方程(8) 的解,那么 $u^*$ 和 $\tilde{u}^*$ 之间的误差估计由下面定理给出.

**定理:** 如果算子 $\tilde{K}^{-1}$ 存在有界,并且方程(5) 的有解 $u^*$,则估计式:

$$\| u^* - \tilde{u}^* \| = O(\frac{1}{n^{\alpha}})$$

成立,这里的 $\tilde{u}^*$ 是方程(8) 的解.

**证:** 由于算子 $G$ 是从 $U$ 到 $V$ 的等距映射,因此把方程(5) 和方程(8) 改写为

$$K_1 u \equiv u + \lambda G^{-1}Tu = G^{-1}v \tag{9}$$

$$\tilde{K}_1\tilde{u} \equiv \tilde{u} + \lambda G^{-1}\Phi T\tilde{u} = G^{-1}\Phi v \tag{10}$$

其中 $K_1 = G^{-1}K, \quad \tilde{K}_1 = G^{-1}\tilde{K}$

现在先求出 $\tilde{w}$、$\tilde{v}$,使得

$$\| G^{-1}Tu^* - \tilde{w} \| \leqslant \frac{C_1}{n^\alpha} \tag{11}$$

$$\| G^{-1}v - \tilde{v} \| \leqslant \frac{C_1}{n^\alpha} \tag{12}$$

事实上,因为 $u^* \in U$,故 $u^* \in W^{2,2}(D)$. 此时由 sobolev 嵌入定理,可知

$u^* \in C^\alpha(\bar{D})$,其中当 $m = 2$ 时,$\alpha < 1$;$m = 3$ 时,$\alpha < \frac{1}{2}$

因此,由引理1推知 $z = G^{-1}Tu^* = \Delta^{-1}au \in C^{2,\alpha}(\bar{D})$

在这种情况下,由引理3,函数 $z$ 连同它的二阶导数可用形如 $\tilde{u}$ 的函数来逼近,而这就保证有估计式

$$\| G^{-1}Tu^* - \tilde{w} \| \leqslant \frac{C_1}{n^\alpha}$$

如果 $v \in C^\alpha(\bar{D})$,经过类似的讨论,存在 $\tilde{v} \in \tilde{V}$,使得估计式

$$\| G^{-1}v - \tilde{v} \| \leqslant \frac{C_2}{n^\alpha} \quad 成立$$

现在令 $\tilde{u} = -\lambda\tilde{w} + \tilde{v}$,则得

$$\| u^* - \tilde{u} \| = \| -\lambda G^{-1}Tu^* + G^{-1}v - (-\lambda\tilde{w} + \tilde{v}) \| \leqslant \frac{\lambda C_1}{n^\alpha} + \frac{C_2}{n^\alpha} \tag{13}$$

$$(I + \lambda G^{-1}\Phi T)^{-1}(G^{-1}\Phi Gu^* + \lambda G^{-1}\Phi Tu^*) = \tilde{u}^*$$

记 $\tilde{u}_0 = \tilde{K}_1^{-1}G^{-1}\Phi GK\tilde{u}$,则 $\quad \| u^* - \tilde{u}^* \| \leqslant \| u^* - \tilde{u} \| + \| \tilde{u} - \tilde{u}_0 \| + \| \tilde{u}_0 - \tilde{u}^* \| \quad (14)$

由于 $\| \tilde{u} - \tilde{u}_0 \| = \| \tilde{K}_1^{-1}\tilde{K}_1\tilde{u} - \tilde{K}^{-1}(G^{-1}\Phi G + \lambda G^{-1}\Phi T)\tilde{u} \| \leqslant$

$$\| \tilde{K}_1^{-1} \| \, \| \tilde{u} + \lambda G^{-1}\Phi T\tilde{u} - (G^{-1}\Phi G + \lambda G^{-1}\Phi T)\tilde{u} \| = \| \tilde{K}^{-1} \| \, \| \tilde{u} - G^{-1}\Phi G\tilde{u} \| = 0$$

故

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 \tag{15}$$

注意到 $u^*$ 是方程(9)的解,即 $K_1u^* \equiv u^* + \lambda G^{-1}Tu^* = G^{-1}v$

又因为 $\tilde{K}_1\tilde{u}^* \equiv \tilde{u}^* + \lambda G^{-1}\Phi T\tilde{u}^* = G^{-1}\Phi v$ 即 $\quad \tilde{K}_1\tilde{u}^* \equiv \tilde{u}^* + \lambda G^{-1}\Phi T\tilde{u}^* = G^{-1}\Phi GG^{-1}v$

于是 $\tilde{K}_1\tilde{u}^* = G^{-1}\Phi GK_1u^*$ 　因此 $\tilde{u}^* = \tilde{K}_1^{-1}G^{-1}\Phi GK_1u^*$

下面来估计(14)式中的最后一项,

$$\| \tilde{u}_0 - \tilde{u}^* \| = \| \tilde{K}_1^{-1}G^{-1}\Phi GK_1\tilde{u} - \tilde{K}_1^{-1}G^{-1}\Phi GK_1u^* \| \leqslant$$

$$\| \tilde{K}_1^{-1}G^{-1}\Phi GK_1 \| \, \| \tilde{u} - u^* \| \leqslant \frac{C_3}{n^\alpha} \tag{16}$$

结合式(13)、(14)、(15)、(16)就给出了如下的估计:

$$\| u^* - \tilde{u}^* \| = O(\frac{1}{n^\alpha})$$

由上面定理知道,当方程(8)的解 $\tilde{u}_n^*$ 作为方程(5)的近似解时,按空间 $U$ 中的距离,其收敛速度为

$$\| u^* - \tilde{u}_n^* \|_U = O(\frac{1}{n^\alpha})$$

由此容易知道 $\tilde{u}_n^*$ 是一致收敛于 $u^*$ 的. 事实上,用按 Green 函数表示 $u$ 的表达式得

$$| u^*(x,y) - \tilde{u}_n^*(x,y) | = | \iint_D g(x,y)\Delta(u^* - \tilde{u}_n^*)\mathrm{d}x\mathrm{d}y | \leqslant$$

$$[\iint_D |g(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y]^{\frac{1}{2}} \| u^* - \tilde{u}_n^* \|_U = O(\frac{1}{n^\alpha})$$

如果解具有更高阶的可微性质,则还可以得到更快的收敛速度.

## 参 考 文 献

1 陈亚浙,吴兰成.二阶椭圆型方程与椭圆型方程组.北京:科学出版社,1991.1~42
2 李荣华,冯果忱.微分方程数值解法.北京:人民教育出版社,1980.217~233
3 陈传淼,黄云清.有限元高精度理论.长沙:湖南科学技术出版社,1995.235~309
4 余德浩.自然边界元方法的数学理论.北京:科学出版社,1993.71
5 孙永生等.函数逼近论:上下册.北京:北京师范大学出版社,1990

# An appronimate solution to the boundary value problem of elliptic equation

Zhou Xuanwei
(Dept. of Mathematics, Wenzhou University, Wenzhou 325027)

**Abstract** In this paper, an approximate solution to the boundary value problem of ellipitic equation $\Delta u + \lambda a u = v$ under the condition $u/\Gamma = 0$ is given, and error estimation for the appronimate solution is obtained.

**Key words** elliptic equation boundary value problem appronimate solution error estimation