

关于用稳恒电流场模拟静电场原因的探讨

冯元新 李明

(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 从理论上分析说明了为什么要用和能用稳恒电流场来模拟静电场的原因,并对《大学物理实验教程》一书上有关这个实验的不足之处和经常出现的问题进行了补充说明和解释。

关键词 静电场 稳恒电流场 模拟法 畸变 电势 良导体 稳定

中图分类号 O441.1

在模拟静电场实验中,《大学物理实验教程》一书中简单地分析了要用电流场模拟静电场的原因,但笔者经过分析研究之后,认为教程上分析的不够详细,还有一些欠缺,故对此以下几点补充。

教程上分析阐述了为什么要用模拟法来测静电场,其叙述如下:

“在直接测量静电场时,必然会引起原电场的畸变,而稳恒电流场,一方面它的数学表达式与静电场具有相同的形式,另一方面稳恒电流又易于观测,故可以用稳恒电流场来模拟静电场。”^[1]

从上述一段话中,可以看出,教程上认为要用稳恒电流场模拟静电场的主要原因是在测量静电场时会有畸变产生,能用稳恒电流场模拟静电场的原因是它们的数学表达式具有相同的形式。

而笔者认为教程上并没有说明当测量仪器引入稳恒电流场时,是否会引起稳恒电流场的畸变。若当测量仪器张稳恒电流场时,没畸变产生,而当测量仪器引入静电场时,有畸变产生,则可认为要用稳恒电流场模拟静电场的主要原因是无畸变产生;然而,当测量仪器引入稳恒电流场时,也有畸变产生,说明畸变并不是要用模拟法来测静电场的主要因素,而是另有原因。

1 计算分析

为分析以上所说的情况,分以下三种情况来计算分析:

先从简单情况来考虑,若要测两块电荷均匀分布的平行平板的静电场电势的分布,其空间横截面为二平行直线,那可近似的认为两平板间的电场是匀强电场。

1.1 从理论上来计算分析静电场中的电势分布函数

如图1,选任一点O为原点,并设该点上的电势为 φ_0

$$\text{由电势定义 } \varphi(P) - \varphi(O) = - \int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

得 $\varphi(P) = \varphi(O) - E_0 \cdot r = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta$

r 为 P 点的位矢

1.2 用测量仪器直接测量静电场时,其电势的分布函数的变化

假设测量仪器为一半径为 a ,介电常数为 ϵ 的无限长圆柱,柱轴与 E_0 垂直,则由静电场引起的电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

(2) 图 1 平行平板静电场横截面图

用柱坐标表示为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

取 Z 轴沿柱轴,极轴沿外场的圆柱坐标系,因此,电场分布与 Z 轴坐标无关,柱内外间电势的一般形式为

$$\varphi_{\text{外}}(r, \theta) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n + (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) r^{-n}] \quad (r > a) \quad (4)$$

$$\varphi_{\text{内}}(r, \theta) = C_n + D'_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [(A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) r^n + (C'_n \cos n\theta + D'_n \sin n\theta) r^{-n}] \quad (r < a)$$

边界条件

(1) $\varphi_{\text{内}}|_{r=0}$ 有限

(2) $\varphi_{\text{外}}|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta$

(3) $\varphi_{\text{内}}|_{r=a} = \varphi_{\text{外}}|_{r=a} \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_{\text{内}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_{\text{外}}}{\partial r} \Big|_{r=a}$

由条件(1) $D'_0 = 0 \quad C'_n = D'_n = 0 \quad \varphi_{\text{内}}(r, \theta) = C_n + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) r^n$

由条件(2) $D_0 = B_n = 0 \quad C_0 = \varphi_0 \quad A_n = 0 (n \neq 1) \quad A_1 = -E_0$

因此 $\varphi_{\text{外}}(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) r^{-n}$

再用条件(3)得

$$\begin{cases} C'_n + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) r^n = \varphi_0 - E_0 r \cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) r^{-n} \\ \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} n (A'_n \cos n\theta + B'_n \sin n\theta) a^{n-1} = \epsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-n) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) a^{-n-1} - \epsilon_0 E_0 \cos\theta \end{cases}$$

比较 $\cos\theta, \sin\theta (n=1)$ 的系数得 $C'_0 = \varphi_0$

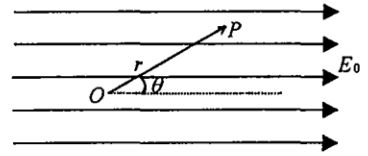
$$\begin{cases} A'_1 a = C_1 a^{-1} - E_0 a \\ \epsilon A'_1 = -\epsilon_0 C_1 / a^2 - \epsilon_0 E_0 \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 a = D_1 a^{-1} \\ \epsilon B'_1 = -\epsilon_0 D_1 / a^2 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A'_1 = -\frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} E_0 \\ C_1 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} a^2 E_0 \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = 0 \\ D_1 = 0 \end{cases}$$

比较 $\cos n\theta, \sin n\theta (n \neq 1)$ 的系数得

$$\begin{cases} a^n A'_n = C_n / a^n \\ \epsilon A'_n a^{n-1} = -\epsilon_0 a^{n-1} C_n \end{cases} \quad \begin{cases} a^n B'_n = D_n a^{-n} \\ \epsilon B'_n a^{n-1} = -\epsilon_0 D_n a^{-n-1} \end{cases}$$



得 $A'_n = C_n = B'_n = D_n = 0$

故

$$\begin{cases} \varphi_{\text{内}}(r, \theta) = \varphi_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon} E_0 r \cos \theta & (r < a) \\ \varphi_{\text{外}}(r, \theta) = \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \cdot \frac{a^2}{r} E_0 \cos \theta & (r > a) \end{cases} \quad (5)$$

其电场分布如图2.

测量仪器一般是良导体,即 $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ 时,由(5)式近似得

$$\begin{cases} \varphi_{\text{内}} \approx \varphi_0 & (r < a) \\ \varphi_{\text{外}} \approx \varphi_0 - E_0 r \cos \theta + \frac{a^2}{r} E_0 \cos \theta & (r > a) \end{cases} \quad (6)$$

因此测量仪器所测得的电势为 φ_0 ,即相当于理论上 O 点的电势,所以当 $a \rightarrow 0$ 时,即测量仪器形似一根细长的针状物(在模拟静电场实验中,测量仪器为探针,其外形就是一根细长的针状物)或 $r \gg a$ 时,则(6)式中的 $\varphi_{\text{外}} \approx \varphi_0 - E_0 r \cos \theta$,也就相当于理论上空间任意一点 P 点的电势,综上分析可知,测量仪器放入电场时,引起的测量误差很小,可以忽略不计.

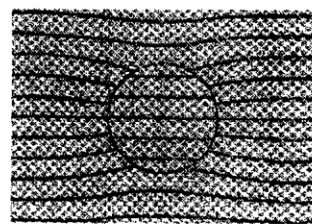


图2 均匀电场中置入半径为 a 的无限长圆柱导体时引起的畸变场

1.3 用模拟法测量时,测量仪器引入稳恒电流场时,其电势的分布函数的变化^[2]

同样可假设测量仪器是半径为 a ,电导率为 σ_{e1} 的一根无限长圆柱(相当于一根探针)置于电导率为 σ_{e2} ,流有均匀电流 j_f ($j_f = \sigma_{e2} E_0$) 的稳恒电流场中,其电势同样满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ 电流区域外稳恒电场方程与没有电荷分布区域的静电场方程比较如下:

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla \varphi & \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 & \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} & \mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E} \\ \nabla^2 \varphi = 0 & \nabla^2 \varphi = 0 \\ Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\sigma & I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\sigma \\ \begin{cases} \varphi_i = \varphi_j \\ \varepsilon_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varepsilon_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = 0 \end{cases} & \begin{cases} \varphi_i = \varphi_j \\ \sigma_{ei} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \sigma_{ej} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = 0 \end{cases} \end{array}$$

由以上比较可看出,在静电场中与稳恒电流场中物理规律极其相似,这是能用稳恒电流场模拟静电场的前提条件.因此只要作代换 $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{D}$, $\sigma_e \leftrightarrow \varepsilon$, $I \leftrightarrow Q$ 就可由一组方程得到另外一组方程,也即静电场中电势的解作如上代换就可得同等条件下稳恒电流场中电势的解.

由此得

$$\begin{cases} \varphi_{\text{内}} = \varphi_0 - \frac{2j_f}{\sigma_{e1} + \sigma_{e2}} r \cos \theta \\ \varphi_{\text{外}} = \varphi_0 - \frac{j_f}{\sigma_{e2}} r \cos \theta + \frac{j_f(\sigma_{e1} - \sigma_{e2})}{\sigma_{e2}(\sigma_{e1} + \sigma_{e2})} \cdot \frac{a^2}{r} \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

测量仪器一般是良导体,即 $\sigma_{e1} \gg \sigma_{e2}$ 时,由(7)式近似得

$$\begin{cases} \varphi_{\text{内}} \approx \varphi_0, \text{即测量仪器上测得的电势约为 } \varphi_0 \\ \varphi_{\text{外}} \approx \varphi_0 - \frac{j_f}{\sigma_{e2}} r \cos\theta + \frac{j_f}{\sigma_{e2}} \cdot \frac{a^2}{r} \cos\theta \end{cases} \quad (8)$$

2 结 论

从以上 1.2、1.3 的计算结果对比可知,不管是静电场,还是稳恒电流场,当测量仪器引入时都要产生畸变,并且畸变的效果极其相似,因此,畸变不是用稳恒电流场模拟静电场的主要原因.那原因又是什么呢?

静电场在空间的存在并不稳定.如任一介质与带电体相接触,都要引起电荷的转移,从而改变静电场的分布;即使不与带电体接触,其存在也会引起其周围静电场分布的变化(静电场是全空间分布的),也即书上所说的畸变.而稳恒电流场则不同,只有改变其电压的大小或介质置入电流场中,从而改变电流大小或流向时,才会引起电流场中电势的改变(电流场只存在于闭合回路中).

总之,稳恒电流场比静电场更稳定,也更易测量,这才是要用稳恒电流场模拟静电场的原因.

从 1.2、1.3 的计算结果与 1.1 相比较可知与理论值的误差很小.同时,由公式(6)或公式(8)可以知道为什么在测靠近电极附近的电势时,其测量误差特别大.其原因是电极与测量仪器的探针的距离 r 比较小,由畸变引起的修正项 $a^2 E_0 \cos\theta / r$ 比较大,通俗地说,电极在畸变范围内,由此引起较大的误差.因此,要减少测量时的误差,测量点要远离电极所在的位置.

参 考 文 献

- 1 潘人培等.大学物理实验教程.杭州:杭州大学出版社,1996.254~260
- 2 郭硕鸿.电动力学.北京:高等教育出版社,1995.50~71

Approach the reasons for modelling of electrostatic field by the steady current field

Feng Yuanxin Li Ming

(Department of Basic Science, Hangzhou institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract This paper analyses why we demand to and can simulate electrostatic field with steady current field on theory, and supplement to the experimental teaching material, and moreover, explain the cause of some problems appeared in the experiment.

Key words electrostatic field steady current field simulation aberrance electric potential good conduct stabilization