

分布函数质量因子算法的讨论

李祖樟

(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 比较了两种计算分布质量因子的方法, 并对结果进一步讨论.

关键词 质量因子 二阶矩法 0.865 法

中图分类号 TN241

分布质量因子在物理学中有着重要的应用. 在光学中, 光束质量因子是衡量激光光束优劣的一项重要指标, 其好坏直接影响到实际应用. 一般认为高斯分布为理想分布, 其质量因子最小. 90 年代初 siegman 提出的以 M^2 统一描写光束质量是以高斯光束为标准来定义非高斯光束, M^2 中采用的是二阶矩来定义平均光腰和发散角. 这种定义方法给研究非高斯光束的传播和变换带来了便利, 但存在一定的局限性. 首先, 当光束受到光阑的强约束时, 二阶矩便失去意义; 其次, 在二阶矩所定义的等效光斑尺寸内, 光束的功率占总功率的百分比依赖于光场分布. 对基模高斯光束, 这个比例为 86.5%, 对其他光束就不一定是 86.5%, 而这个比例对材料加工, 光纤传输等应用是十分重要的. 为了解决上述问题, ISO 提出了另一种描述光束质量的方法, 即 0.865 法. 这种方法规定, 在束腰光斑尺寸和远场发散角所限定的区域内, 光功率占总功率的比例为 86.5%^[1]. 在这种规定下, 同样认为是非高斯光束质量因子大于高斯光束质量因子, 而本文发现两例在一维情况下用 0.865 法计算, 其质量因子小于高斯分布质量因子的情况.

1 分布质量因子的定义

1.1 0.865 法

$$\text{质量因子 } M^2 = x_0 \cdot w_0 \quad (1)$$

$$x_0: \text{函数强度密度 } |f(x)|^2 \text{ 的宽度. 有 } \int_{-x_0}^{+x_0} |f(x)|^2 dx = 0.865 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

$$w_0: |F(w)|^2 \text{ 的宽度. } F(w) \text{ 为 } f(x) \text{ 的傅立叶变换.}$$

1.2 二阶矩法

$$\text{质量因子 } M^2 = w \cdot \theta \quad (2)$$

其中, w 和 θ 采取二阶矩定义:

$$w^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}; \quad \theta = \lambda \sqrt{\langle w^2 \rangle}, \quad \langle w^2 \rangle = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |F(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw}$$

2 三种不同光束分布的质量因子的计算

2.1 用 0.865 法计算

2.1.1 高斯型分布: $g(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$, 则光强度分布为: $|g(x)|^2 = A^2 e^{-\alpha^2 x^2}$ 宽度由下式得出:

$$\int_{-x_0}^{+x_0} |g(x)|^2 dx = 0.865 \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx \quad \text{即} \quad \int_{-x_0}^{+x_0} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2}\alpha x)^2} d(\sqrt{2}\alpha x) = 0.865 \sqrt{2\pi}$$

查表知 $\sqrt{2}\alpha x_0 > 1.49$, 取其下限 $|g(x)|^2$ 的宽度:

$$x_0 = \frac{1.49}{\sqrt{2}\alpha} \quad (3)$$

$$g(x) \text{ 的傅立叶变换 } G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-iwx} dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(x^2 + \frac{2}{\alpha^2}iwx)} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} A e^{-\frac{w^2}{2\alpha^2}}$$

$$\text{谱强度分布为:} \quad |G(w)|^2 = \frac{2\pi}{\alpha^2} A^2 e^{-\frac{w^2}{\alpha^2}}$$

$|G(w)|^2$ 的宽度 w_0 类似于前面的计算可得:

$$w_0 = \frac{1.49\alpha}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

因此, 由(3), (4) 式高斯型分布的质量因子用该方法计算为:

$$M_g = x_0 \cdot w_0 > \frac{1.49^2}{2} = 1.110 \quad (5)$$

到目前为止, 认为高斯型分布为理想分布, 对于其它分布的质量因子有: $M^2 > M_g^2$

本文发现二例, 它们的质量因子按该方法计算小于高斯分布的质量因子.

2.1.2 $f(x) = \frac{1}{(1+k^2 x^2)^2}$ 的分布质量因子

(1) $f(x)$ 的宽度 x_0 由以下计算可得: 强度分布为:

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= \frac{1}{(1+k^2 x^2)^4} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+k^2 x^2)^4} = \frac{2}{k} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^4} = \frac{1}{3k} \left[\frac{y}{(1+y^2)^3} + \frac{5}{4} \frac{y}{(1+y^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} \frac{y}{(1+y^2)} + \frac{15}{8} \operatorname{tg}^{-1} y \right] \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3k} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16k} \\ \int_{-x_0}^{+x_0} \frac{dx}{(1+k^2 x^2)^4} &= \frac{2}{k} \int_0^{x_0} \frac{dy}{(1+y^2)^4} = \frac{1}{3k} \left[\frac{y_0}{(1+y_0^2)^3} + \frac{5}{4} \frac{y_0}{(1+y_0^2)^2} + \frac{15}{8} \frac{y_0}{(1+y_0^2)} + \frac{15}{8} \operatorname{tg}^{-1} y_0 \right] \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \int_{-x_0}^{+x_0} |f(x)|^2 dx = 0.865 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx, \text{ 则有:}$$

$$\frac{1}{3k} \left[\frac{y_0}{(1+y_0^2)^3} + \frac{5}{4} \frac{y_0}{(1+y_0^2)^2} + \frac{15}{8} \frac{y_0}{(1+y_0^2)} + \frac{15}{8} \operatorname{tg}^{-1} y_0 \right] = 0.865 \times \frac{5\pi}{16} = 0.849211764$$

则满足上式的 $y_0 = kx_0$ 的范围为 $(0.638518, 0.638519)$, 所以宽度:

$$x_0 \in (0.638518/k, 0.638519/k) \quad (6)$$

(2) 下面计算 $f(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^2}$ 的傅立叶变换 $F(w)$ 的宽度

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos wx}{(1+k^2x^2)^2} dx = \frac{1}{\pi k} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{wy}{k}}{(1+y^2)^2} dy = \frac{1}{4k} (1 + |w/k|) e^{-|w/k|}$$

频谱 $F(w)$ 的强度分布为: $|F(w)|^2 = \frac{1}{16k^2} (1 + |w/k|)^2 e^{-2|w/k|}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{16k^2} (1 + |w/k|)^2 e^{-2|w/k|} dw = \frac{1}{8k} \int_0^{+\infty} (1+y)^2 e^{-2y} dy = \frac{5}{32k}$$

$$\int_{w_0}^{+\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{32k} (y^2 + 3y + \frac{5}{2}) e^{-2y} \Big|_{w_0}^{+\infty} = \frac{1}{32k} \left[\left(\frac{w_0}{k}\right)^2 + \frac{3w_0}{k} + \frac{5}{2} \right] e^{-\frac{2w_0}{k}}$$

若 w_0 为 $|F(w)|^2$ 的宽度, 则有如下关系式: $2 \int_{w_0}^{+\infty} |F(w)|^2 dw = 0.135 \int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw$

$$\text{从而得: } \left[\left(\frac{w_0}{k}\right)^2 + \frac{3w_0}{k} + \frac{5}{2} \right] e^{-\frac{2w_0}{k}} = 0.135 \times \frac{5}{2} = 0.3375$$

则满足上式的 w_0 的范围为

$$w_0 \in (1.726296750k, 1.726296755k). \quad (7)$$

由(6)和(7)式, 可知 $f(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^2}$ 的分布质量因子为:

$$M_f^2 = x_0 \cdot w_0 \in (1.102272, 1.102273) \quad (8)$$

2.1.3 $h(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^4}$ 的分布质量因子

(1) $h(x)$ 的宽度 x_0 由以下计算可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+k^2x^2)^8} = \frac{2}{k} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^4} \\ &= \frac{1}{k} \left\{ y \left[\frac{13 \times 11 \times 3}{2^{11}(1+y^2)} + \frac{13 \times 11}{2^{10}(1+y^2)^2} + \frac{13 \times 11}{2^8 \times 5(1+y^2)^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{13 \times 11 \times 3}{2^7 \times 35(1+y^2)^4} + \frac{13 \times 11}{2^4 \times 105(1+y^2)^5} + \right. \\ &\quad \left. \frac{13}{2^2 \times 42(1+y^2)^6} + \frac{1}{14(1+y^2)^7} \right] + \frac{13!!}{2^7 \times 7!} \operatorname{tg}^{-1} y \Big\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{429\pi}{2^{11}k} \end{aligned}$$

$$\text{令 } \int_{-x_0}^{+x_0} |h(x)|^2 dx = 0.865 \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx$$

$$\int_{-x_0}^{+x_0} |h(x)|^2 dx = \frac{2}{k} \int_0^{y_0} \frac{dy}{(1+y^2)^8}$$

$$= \frac{2}{k} \left\{ y \left[\frac{13 \times 11 \times 3}{2^{11}(1+y^2)} + \frac{13 \times 11}{2^{10}(1+y^2)^2} + \frac{13 \times 11}{2^8 \times 5(1+y^2)^3} + \frac{13 \times 11 \times 3}{2^7 \times 35(1+y^2)^4} + \frac{13 \times 11}{2^4 \times 105(1+y^2)^5} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{13}{2^2 \times 42(1+y^2)^6} + \frac{1}{14(1+y^2)^7} \right] + \frac{13!!}{2^7 \times 7!} \lg^{-1} y \right\} |_0^{y_0} = 0.865 \frac{429\pi}{2^{11}k}$$

则满足上式的 $y_0 = kx_0$ 的范围为 $(0.407, 0.408)$, 所以宽度:

$$x_0 \in (0.407/k, 0.408/k) \quad (9)$$

(2) 下面计算 $h(x)$ 的傅立叶变换 $H(w)$ 的宽度

$$H(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-iwx} dx = [15 + 15 |w/k| + 6 |w/k|^2 + |w/k|^3] \frac{\pi e^{-w/k}}{48k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(w)|^2 dw = \int_{-\infty}^{+\infty} [15 + 15 |w/k| + 6 |w/k|^2 + |w/k|^3]^2 \left(\frac{\pi e^{-w/k}}{48k} \right)^2 dw = \frac{2\pi^2}{48^2 k} \frac{3861}{8}$$

令 $2 \int_{w_0}^{+\infty} |H(w)|^2 dw = 0.135 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(w)|^2 dw$

$$2 \int_{-w_0}^{+\infty} |H(w)|^2 dw = 2 \int_{-w}^{+\infty} [15 + 15 |u| + 6 |u|^2 + |u|^3]^2 \left(\frac{\pi e^{-u}}{48k} \right)^2 k du$$

$$= \frac{2\pi^2}{48k} (482.625 + 740.25u_0 + 515.25u_0^2 + 208.5u_0^3 + 51.75u_0^4 + 7.5u_0^5 + 0.5u_0^6) e^{-2u_0}$$

$$= 0.135 \frac{2\pi^2}{48^2 k} \frac{3861}{8}$$

则满足上式的 $u_0 = w_0/k$ 的范围为 $(2.69547, 2.69548)$, 所以宽度:

$$w_0 \in (2.69547k, 2.69548k) \quad (10)$$

所以由(9)和(10)式得 $h(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^4}$ 的分布质量因子为:

$$M_h^2 = x_0 \cdot w_0 \in (1.09705629, 1.09975584) \quad (11)$$

从以上计算可知: $M_g^2 > M_f^2 > M_h^2$.

(12)

2.2 用二阶矩法计算三种分布质量因子

(1) 高斯型分布 $g(x) = A e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$, 则光强度分布为: $|g(x)|^2 = A^2 e^{-\alpha^2 x^2}$

$(g)x$ 的傅立叶变换为: $G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i2\pi wx} dx = A \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-\frac{2\pi^2 w^2}{\alpha^2}}$

谱强度分布为: $|G(w)|^2 = \frac{2\pi}{\alpha^2} A^2 e^{-\frac{4\pi^2 w^2}{\alpha^2}}$

$$w^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |g(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx} = \frac{4[-G'(0)]/4\pi^2}{A^2 \sqrt{\pi}/\alpha} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |G(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(w)|^2 dw} = \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \quad \theta = \lambda \sqrt{\langle w^2 \rangle} = \lambda \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}$$

所以:

$$M_g = w \cdot \theta = \lambda/\pi \quad (13)$$

(2) $f(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^2}$ 的分布质量因子

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi wx} dx = \frac{1}{2k} (1 + |2\pi w/k|) e^{-|2\pi w/k|}$$

频谱 $F(w)$ 的强度分布为: $|F(w)|^2 = \frac{1}{4k^2} (1 + |2\pi w/k|)^2 e^{-2|2\pi w/k|}$

$$w^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx} = \frac{4[-G''(0)]/4\pi^2}{\frac{5\pi}{16k}} = \frac{4}{5k^2}$$

$$\langle w^2 \rangle = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |F(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw} = \frac{7k^2}{5\pi^2} \quad \theta = \lambda \sqrt{\langle w^2 \rangle} = \lambda \frac{\sqrt{7}k}{\sqrt{5}\pi}$$

所以 $M_f^2 = w \cdot \theta = \sqrt{\frac{28}{25}} \frac{\lambda}{\pi}$ (14)

(3) $h(x) = \frac{1}{(1+k^2x^2)^4}$ 的分布质量因子

$h(x)$ 的傅立叶变换 $H(w)$

$$H(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-i2\pi wx} dx = [15 + 15|2\pi w/k| + 6|2\pi w/k|^2 + |2\pi w/k|^3] \frac{\pi e^{-2\pi w/k}}{48k}$$

$$w^2 = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |h(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx} = \frac{4}{13k^2} \quad \langle w^2 \rangle = \frac{4 \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 |H(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(w)|^2 dw} = \frac{10k^2}{3\pi^2}$$

所以 $M_h^2 = w \cdot \theta = \sqrt{\frac{40}{39}} \frac{\lambda}{\pi}$ (15)

从以上计算可知: $M_g^2 < M_h^2 < M_f^2$ (16)

3 结果讨论

通过以上计算发现,两种方法的结果并不一致.用 0.865 方法计算分布函数质量因子时出现了比一维高斯分布质量因子更小的一维分布函数,而高斯分布一般被认为理想分布,其质量因子最小.因此,用 0.865 方法计算质量因子有待改进,至少在一维的情况下,它并不能作为最优分布的可靠判据.

参 考 文 献

- 1 林强,王绍民.张量光学.杭州:杭州大学出版社,1994.116~117

A discussion on the calculation of quality factor

Li Zuzhang

(Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract In this paper, two methods of calculate quality factor are compared, and its result is discussed too.

Key words quality factor second moment algorithm 0.865 algorithm