杭州应用工程技术学院学报,第13卷第1期,2001年3月
Journal of Hangzhou Institute of Applied Engineering
Vol.13 No.1, Mar. 2001

Vassiliev 不变量与 Gauss 图

陶志雄
(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 如果 K^u 是通过改变纽结 K(其交叉的编号分别为 1,2,…,n)的某些交叉得到的平凡纽结并且保留编号,利用 Gauss 图本文证明了二阶 Vassliev 纽结不变量 v_2 有下列公式:

$$v_2(K)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(i)l_i-\varepsilon_u(i)l_i^u)-\frac{1}{24}$$

其中 $\varepsilon(i)$和 $\varepsilon_u(i)$分别表示 K 和 K^u 的第 i 个交叉的符号,l_i 和 l_i^u 分别表示打开这些交叉所得的环绕数.

关键词 Vassiliev 不变量 环绕数 Gauss 图
中图分类号 O189.24

在文献[1]中作者定义了 $I_X(K)$和 $I_Y(K)$,证明了 Vassiliev 不变量 $v_2(K)=I_X(K)-I_Y(K)$.借此并利用弦图(chord diagram)或称 Gauss 图证明了 v_2(平凡纽结) $=-\frac{1}{24}$及一些公式,在本文中利用这些公式及其方法证明了下列定理:

定理 K 是一个有 n 个交叉(编号为 1,2,……,n)的纽结图,设 K^u 是通过转换某些 K 的交叉得到的平凡纽结,l_i 是从打开 K 的第 i 个交叉得到的两个分支的环绕数,l_i^u 是相应地从 K^u 得到的环绕数,则

$$v_2(K)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(i)l_i-\varepsilon_u(i)l_i^u)-\frac{1}{24}$$

其中 $\varepsilon(i)$,$\varepsilon_u(i)$分别是 K 和 K^u 中第 i 个交叉的符号(这里总是假定虽然改变二重点符号或转换交叉但它们的编号始终不变).

1 预备知识

对 $x=(x^u)\in \mathrm{R}^3\setminus\{0\}$记 $\omega(x)=\frac{1}{4\pi}\frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha}x^\mu dx^\nu dx^\alpha}{|x|^3}$

是二维单位球面 S^2 的单位面积形式

设 $\gamma:S^1\to \mathrm{R}^3$ 是光滑嵌入,此处将 S^1 恒同于 R/Z

记$\triangle_4=\{(t_1,t_2,t_3,t_4)|0<t_1<t_2<t_3<t_4<1\}$

收稿日期:2000-09-29

$\triangle_3(\gamma)=\{(t_1,t_2,t_3,t_4,z)\mid 0<t_1<t_2<t_3<1,\} \quad z\in R^3\setminus\{\gamma(t_1),\gamma(t_2),\gamma(t_3)\}\}$

定义

$$I_x(\gamma)=\int_{\triangle 4}\omega(\gamma(t_3)-\gamma(t_1))\wedge\omega(\gamma(t_4)-\gamma(t_2))$$

$$I_Y(\gamma)=\int_{\triangle 3(\gamma)}\omega(z-\gamma(t_1))\wedge\omega(z-\gamma(t_2))\wedge\omega(\gamma(z-\gamma(t_3))$$

定理 1.1 设 $v_2(\gamma)=I_X(\gamma)-I_Y(\gamma)$

则 ν_2 在 γ 的同痕下不变,故 ν_2 是纽结不变量,进一步这个纽结不变量满足交叉改变公式,利用 Grofton 积分公式,林晓松等[1]证明了

引理 1.2 ν_2(平凡纽结) $=-\dfrac{1}{24}$

设 K 是嵌入 $\gamma:S^1\to R^3$ 的纽结型,在 K 的一个投影图下,K 除了每个交叉外为投影面上的曲线,沿 K 越过 K 的交叉时可以沿一个半径为 ϵ 且垂直于平面的半圆行进,此时的 K 记为 K_ϵ 并相配于每个交叉以符号 ±1(即此交叉的符号). 当 ϵ 趋于零时,K_ϵ 的极限位置是一条平面闭曲线,仅有横截的二重点,记此极限平面曲线为 K_0,相配于每个二重点以相对应交叉的符号,称这样的 K_0 为符号化的极限平面曲线. 对于每条仅有横截二重点的平面闭曲线,有

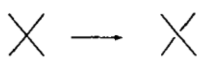
定义 1.3 设 C 是仅有横截二重点的平面闭曲线,C 的弦图(或 Gauss 图)是端点在圆周 S 上的有限条直线段(称为弦)的组合图[2],每条直线段两端点在浸入 $S\to C$ 下成为 C 的相同点即二重点,每条弦配上一个符号,这样的弦图称为带符号的弦图,其中每个相互交叉的弦成为对子,这个对子带有一个符号,它等于这两个弦符号的乘积.

林晓松等[1]证明了下面的命题:

定理 1.4 设 K 是有 n 个交叉的纽结图,则 $\lim I_X(K_\epsilon)$存在,记为 $I_X(K_0)$且

$$I_X(K_0)=\frac{n}{16}+\frac{C_+(K_0)-C_-(K_0)}{4}$$

其中 C_+ 和 C_- 分别表示 K_0 带有正号和负号的弦对的个数.



如果 C 为仅有横截二重点的平面闭曲线,则称过程(见右图)为 C 的一个二重点的分解,对 C 分解可得 2^n 个纽结.

2 定理的证明

由文献[1]的推论 4.4 的证明可知 $I_Y(K_\epsilon)$当 ϵ 趋于零时的极限为 $I_Y(C)$并且

(1) $I_Y(C)=I_X(K_0)-\nu_2(K)$, C 为与 K_0 相同的平面闭曲线,不带符号,K_0 则带上符号;

(2) $I_Y(C)=I_X(K_0^u)-\nu_2(K^u)$, K^u 是转换 K 的适当交叉得到的平凡纽结. 这些交叉不妨设为 1,2,……,s(原编号见第 1 节前).

设 $\epsilon(i)$和 $\epsilon_u(i)$分别表示 K_0, K 和 K^u, K_0^u 二重点 i 或交叉 i 处的符号,$x\cap y$ 表示弦 x 与弦 y 相交从而成为对子,其符号为 $\epsilon(x)\epsilon(y)$,于是由定理 1.4

$$I_X(K_0)=\frac{C_+(K_0)-C_-(K_0)}{4}+\frac{n}{16}=\frac{1}{4}\sum_{\substack{i\cap j\\ i<j}}\epsilon(i)\epsilon(j)+\frac{n}{16}$$

$$=\frac{n}{16}+\frac{1}{4}\Big(\sum_{\substack{i\cap j\\ i<j\leqslant s}}\epsilon(i)\epsilon(j)+\sum_{\substack{i\cap j\\ i\leqslant s<j}}\epsilon(i)\epsilon(j)+\sum_{\substack{i\cap j\\ s<i<j}}\epsilon(i)\epsilon(j)\Big)$$

同理

$$I_X(K_0^u)=\frac{n}{16}+\frac{1}{4}\Big(\sum_{\substack{i\cap j\\ i<j\leqslant s}}\epsilon_u(i)\epsilon_u(j)+\sum_{\substack{i\cap j\\ i\leqslant s<j}}\epsilon_u(i)\epsilon_u(j)+\sum_{\substack{i\cap j\\ s<i<j}}\epsilon_u(i)\epsilon_u(j)\Big)$$

因为当 γ 小于等于 s 时有 $\varepsilon_u(\gamma) = -\varepsilon(\gamma)$. 而当 γ 大于 s 时 $\varepsilon_u(\gamma) = \varepsilon(\gamma)$. 这样

$$I_X(K_0^u) = \frac{n}{16} + \frac{1}{4}\Big(\sum_{\substack{i \cap j \\ i<j\leqslant s}} \varepsilon_u(i)\varepsilon_u(j) - \sum_{\substack{i \cap j \\ i\leqslant s<j}} \varepsilon(i)\varepsilon(j) + \sum_{\substack{i \cap j \\ s<i<j}} \varepsilon(i)\varepsilon(j)\Big)$$

所以

$$I_X(K) - I_X(K_0^u) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ i\leqslant s<j}} \varepsilon(i)\varepsilon(j)$$

另一方面

$$l_i = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j\leqslant s}} \varepsilon(j) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j>s}} \varepsilon(j)$$

$$l_i^u = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j\leqslant s}} \varepsilon(j) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j>s}} \varepsilon_u(j) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j\leqslant s}} \varepsilon(j) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i \cap j \\ j>s}} \varepsilon(j)$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(i)l_i - \varepsilon_u(i)l_i^u) &= \sum_{i\leqslant s}(\varepsilon(i)l_i - \varepsilon_u(i)l_i^u) + \sum_{i>s}(\varepsilon(i)l_i - \varepsilon_u(i)l_i^u) \\ &= \sum_{i\leqslant s}(\varepsilon(i)(l_i + l_i^u) + \sum_{i>s}\varepsilon(i)(l_i - l_i^u) = \sum_{i\leqslant s}\varepsilon(i)\sum_{\substack{j\cap i \\ i>s}}\varepsilon(j) + \sum_{i>s}\varepsilon(i)\sum_{\substack{j\cap i \\ i\leqslant s}}\varepsilon(j) \\ &= 2\sum_{\substack{j\cap i \\ i\leqslant s<j}} \varepsilon(i)\varepsilon(j) = 4(I_X(K_0) - I_X(K_0^u))\end{aligned}$$

因此由(1)(2)

$$\nu_2(K) + \frac{1}{24} = I_X(K_0) - I_X(K_0^u) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(i)l_i - \varepsilon_u(i)l_i^u)$$

这样就完成了定理的证明.

参 考 文 献

1 Lin X S, Wang Z. Integral geometry of plane curves and knot invariants. J Diff Geom, 1996, 44:74 ~ 95

2 Birman J. Lin X-S. Knot polynomials and Vassiliev's invariants. Invent Math, 1993, 111:225 ~ 270

Vassiliev invariant and Gauss diagram

Tao Zhixiong

(Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract Let K be a knot diagram with n crossings and K^u an unknot obtained by changing some crossings of K. By using Gauss diagram this paper proves the following identity of Vassiliev knot invariant v_2:

$$v_2(K) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(i)l_i - \varepsilon_u(i)l_i^u) - \frac{1}{24}$$

here $\varepsilon(i)$ and $\varepsilon_u(i)$ are the signs of the i-th crossings of $K$and K^u respectively (if K^u has the same serial numbers of crossings as K), l_i is the linking number of the two component link obtained from smoothing the ith crossing of K, and l_i^u is the corresponding linking number from K^u.

Key words Vassiliev invariant　linking number　Gauss diagram