

小球在粘滞液体中运动情况的探讨

陈 烨

(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 通过对小球在粘滞液体中运动情况的探讨,为设计制作和改进落球式粘滞系数实验仪提供一定的理论依据.

关键词 落球 粘滞液体 运动情况 探讨

中图分类号 O4-33

石油在管道中的传输、机械工业润滑油的选择、物体在液体中的运动等都与液体的粘滞性有关.测定液体粘度的方法有几种:在纺织、轻工、医药和化工等部门的工厂中常采用旋转式粘度计.在实验室中,对于粘度较小的液体,如水、乙醇等,常用毛细管法,而对于粘度较大的液体,如蓖麻油、变压器油、甘油等,常用落球法.落球法操作简单、使用方便,在大学物理实验中,液体粘滞系数测定方法一般采用落球法.笔者通过对小球在粘滞液体中运动情况的探讨,为设计制作与改进落球式粘滞系数实验仪提供一定的理论依据.

1 落球在无限广阔液体中的运动情况

根据文献[1]所述,若小球的半径为 r ,密度为 ρ ,质量 $m(m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho)$,小球运动速度为 v ,粘滞液体密度为 ρ_0 ,粘滞系数为 η ,则小球从无限广阔的液面静止下落的运动方程如下:

$$mg - F_{\text{浮}} - f_{\text{粘}} = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

其中: $F_{\text{浮}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g$, $f_{\text{粘}} = 6\pi r \eta v$ 得:

$$mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g - 6\pi r \eta v = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

因为 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv ds}{ds dt} = \frac{v dv}{ds}$ 代入(2)式得:

$$ds = \frac{3mv}{3mg - 4\pi r^3 \rho_0 g - 18\pi r \eta v} dv \quad (3)$$

当 $\frac{dv}{dt} = 0$ 时,由(2)得:小球达到收尾速度 v_0 为

$$v_0 = \frac{3mg - 4\pi r^3 \rho_0 g}{18\pi r \eta} = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \quad (4)$$

则粘滞系数 η 为

$$\eta = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9v_0} \quad (5)$$

小球从静止下落至达到收尾速度 v_0 , 所走过的路程为

$$S = \int_0^{v_0} \frac{3mv}{3mg - 4\pi r^3 \rho_0 g - 18\pi r \eta v} dv = m \left[-\frac{v}{6\pi r \eta} - \frac{r(\rho - \rho_0)g}{27\pi \eta^2} \ln \left| -6\pi r \eta v + \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \right| \right] \Big|_0^{v_0} \quad (6)$$

很显然, 当 $v = v_0$ 时, $-6\pi r \eta v_0 + \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g = 0$

$$\ln \left| -6\pi r \eta v_0 + \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \right| \rightarrow -\infty \quad \text{则有 } S \rightarrow +\infty$$

根据文献[1], 从理论上来说: $v = v_0[1 - e^{-\frac{6\pi r \eta}{m}t}]$, 只有当 $t \rightarrow \infty$, 才有 $v = v_0$. 因此小球从静止下落至达到收尾速度 v_0 所走过的路程 $S \rightarrow \infty$. 但实际上, 当 $t = \frac{5m}{6\pi r \eta}$ (化简为: $t = \frac{10r^2\rho}{9\eta}$) 时, $v = 0.993v_0$, 可以认为小球已达到收尾速度. 而达到 $0.993v_0$ 时间非常短, 小球 ($r < 4 \text{ mm}$) 从静止下落至收尾速度 $0.993v_0$ 所走过的路程也很短, 见表 1.

表 1 不同半径小球的收尾速度与达到 $0.993v_0$ 所需时间和路程的比较表

| 小球半径 $r(10^{-3}\text{m})$ | 1.00 | 1.50 | 2.00 | 3.00 | 4.00 | 5.00 | 6.00 | 7.00 | 8.00 | 9.00 | 10.00 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 到达时间 $t(10^{-3}\text{s})$ | 8.86 | 19.93 | 35.43 | 79.72 | 141.72 | 221.43 | 338.86 | 434.01 | 566.87 | 717.44 | 885.73 |
| 收尾速度 $v_0(10^{-3}\text{m/s})$ | 15.26 | 34.34 | 61.05 | 137.36 | 244.19 | 381.55 | 549.44 | 747.84 | 976.78 | 1236.23 | 1526.21 |
| 小球路程 $S(10^{-3}\text{m})$ | 0.11 | 0.54 | 1.72 | 8.69 | 27.47 | 67.07 | 139.07 | 257.64 | 439.53 | 704.04 | 1073.07 |

(参数: 小球密度为 $\rho = 7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 重力加速度为 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$)

20° 蓖麻油密度为 $\rho_0 = 9.50 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$ 粘滞系数值为 $\eta = 9.86 \times 10^{-1} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$)

小球运动情况的讨论:

在无限广阔的液体中, 随着小球半径的增大, 其收尾速度与达到 $0.993v_0$ 所需时间、路程迅速增大. 但在半径小于 4 mm 的情况下, 小球从静止下落至达到 $0.993v_0$ 所需时间、路程都非常短.

2 落球在筒体内液体中的运动情况

在实际测量中, 由于不可能在无限广阔的液体中进行, 只能在一定的容器内. 因此, 根据文献[2]所述, 在内半径为 R , 筒高为 H 的容器内, 考虑到器壁的影响, 设小球的实验速度为 v' , 则小球在(3)式中的 v 应为

$$v = v' \left(1 + \frac{12r}{5R} \right) \left(1 + \frac{33r}{10H} \right) \quad (7)$$

$$\text{同时, 为了修正托斯克公式, 引进雷诺数 } \text{Re}, \text{Re} = \frac{2rv'\rho_0}{\eta} \quad (8)$$

$$\text{并将小球所受粘滞力取一级近似得 } f_{\text{粘}} = 6\pi r \eta v \left(1 + \frac{3\text{Re}}{16} \right) \quad (9)$$

本文中, 在筒体内半径 $R \leq 3 \text{ cm}$, 筒高 $H \leq 150 \text{ cm}$ 情况下, 20° 左右蓖麻油内运动的半径 $r \leq 0.5 \text{ cm}$ 小球其所受到粘滞力的一级修正系数: $\frac{3\text{Re}}{16} < 1$

将(7)~(9)式代入(2)式得

$$mg - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g - 6\pi r \eta v' \left(1 + \frac{12r}{5R}\right) \left(1 + \frac{33r}{10H}\right) \left(1 + \frac{3rv'\rho_0}{8\eta}\right) = m \frac{dv}{dt} \quad (10)$$

设小球在实验过程中所走过的路程为 s' , 因为

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ds'}{dt} \frac{dv}{ds'} = v' \frac{dv'}{ds'} = \left(1 + \frac{12r}{5R}\right) \left(1 + \frac{33r}{10H}\right) v' \frac{dv'}{ds'}$$

由此可设 $\varphi = \left(1 + \frac{12r}{5R}\right) \left(1 + \frac{33r}{10H}\right)$ 代入(10)式得

$$ds' = \frac{16r^2 \varphi \rho v'}{16r^2(\rho - \rho_0)g - 72\varphi \eta v' - 27r\varphi \rho_0 v'^2} dv' \quad (11)$$

当 $\frac{dv}{dt} = 0$ 时, 由(10)得小球达到收尾速度 v'_0 为

$$v'_0 = \frac{-12\eta + 4\sqrt{9\eta^2 + \frac{3r^3\rho_0(\rho - \rho_0)g}{(1 + 12r/5R)(1 + 33r/10H)}}}{9r\rho_0} \quad (12)$$

则粘滞系数 η 为

$$\eta = \frac{2r^2(\rho - \rho_0)g}{9(1 + 12r/5R)(1 + 33r/10H)v'} - \frac{3}{8}r\rho_0 v' \quad (13)$$

设 $\alpha = -\frac{27\rho_0}{16r\rho}$ $b = -\frac{9\eta}{2r^2\rho}$ $c = \frac{(\rho - \rho_0)g}{\rho\varphi}$, 则(10)式化简为

$$dt' = \frac{1}{av' + bv' + c} dv' \quad (14)$$

则小球从静止下落至达到收尾速度 v'_0 , 所需时间 t' 为:

$$t' = \int_0^{v'_0} \frac{1}{av'^2 + bv' + c} dv' = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2av' + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2av' + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \Big|_0^{v'_0} \quad (15)$$

而(11)式化简为

$$ds' = \frac{v'}{av'^2 + bv' + c} dv' \quad (16)$$

则小球从静止下落至达到收尾速度 v'_0 , 所走过的路程 s' 为

$$\begin{aligned} s' &= \int_0^{v'_0} \frac{v'}{av'^2 + bv' + c} dv' \\ &= \left[\frac{1}{2a} \ln |av'^2 + bv' + c| - \frac{b}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2av' + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2av' + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \right] \Big|_0^{v'_0} \end{aligned} \quad (17)$$

与上述相同, 当 $v_0 = 0.993v'_0$, 可以认为小球已达到收尾速度 v'_0 , 而达到 $0.993v'_0$ 时间也非常短, 小球从静止下落至达到收尾速度 $0.993v'_0$, 所走过的路程也很短, 见表2.

表2 不同筒体不同半径小球的收尾速度与达到 $0.993v'_0$ 所需时间、路程的比较表

| | | | | | | | | | |
|----------------------------------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| 小球半径 $r(10^{-3}\text{m})$ | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 3.00 | 3.00 | 3.00 | 5.00 | 5.00 | 5.00 |
| 筒体半径 $R(10^{-3}\text{m})$ | 20.00 | 30.00 | 30.00 | 20.00 | 30.00 | 30.00 | 20.00 | 30.00 | 30.00 |
| 筒体高度 $H(10^{-3}\text{m})$ | 800.00 | 800.00 | 1500.00 | 800.00 | 800.00 | 1500.00 | 800.00 | 800.00 | 1500.00 |
| 到达时间 $t'(10^{-3}\text{s})$ | 21.45 | 21.39 | 21.36 | 43.29 | 42.75 | 42.72 | 92.14 | 88.67 | 88.42 |
| 收尾速度 $v'_0 t(10^{-3}\text{m/s})$ | 45.62 | 47.86 | 48.84 | 87.61 | 95.34 | 95.84 | 171.03 | 190.28 | 191.71 |
| 小球路程 $S'(10^{-3}\text{m})$ | 0.71 | 0.74 | 0.75 | 2.73 | 2.92 | 2.93 | 10.72 | 11.96 | 12.01 |

小球运动情况的讨论,比较表 1 和表 2 相关内容可知:

(1) 在筒体参数一定的情况下,小球的半径越小,即小球与筒体的内径之比越小,其收尾速度与达到 $0.993v'_0$ 所需时间、路程越接近理想状态值(即在无限广阔的液体中),反之,筒体的状况对小球的运动情况影响越大,其结果越偏离理想状态值.

(2) 在小球的半径一定的情况下,筒体的内半径值大小对小球的运动情况影响很大,而筒体的高度对小球的运动情况很小.同时,小球的收尾速度与达到 $0.993v'_0$ 所需时间、路程均小于理想状态值.

(3) 从表 2 可推算出在该条件范围内,小球所受到粘滞力的一级修正系数为

$$0.034 < \frac{3\text{Re}}{16} < 0.349 \text{ (雷诺数: } 0.181 < \text{Re} < 1.861 \text{)} \text{ 属稳流情况下,在许可范围内.}$$

3 结 语

通过对小球在粘滞液体中运动情况的探讨,为设计制作与改进落球式粘滞系数实验仪提供一定的理论依据.对筒体的高度的设置先必须算出小球从静止下落至达到收尾速度所需的路径理论值,并留出足够的小球匀速运动所需的高度空间,以便在适当的位置安装探测收尾速度的仪器.其次,也需考虑到大多数实验者的身高与其他情况.对于筒体的内半径,既不能太大,否则需大量的粘滞液体,提高了实验成本;也不能过小,否则,筒壁对小球的运动过程影响太大.因此,通过上述理论公式,再结合实际情况,可优选出在各种粘滞系数较大液体中运动的小球半径、筒体高度、内半径的最佳值.通过上述理论公式,还可计算出如 $V = 0.999v_0$,或更高时各参数,以对实验仪进行改进提供一定的理论依据.

参 考 文 献

- 1 马文蔚.物理学(上册).北京:高等教育出版社,1997.68~71
- 2 孟尔熹主编.普通物理实验.济南:山东大学出版社,1998.107~109

Discussion of the globule movement in the liquid of viscosity

Chen Ye

(Dept. of Basic Science, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract By discussion of the globule movement in the liquid of viscosity, the paper provides theoretic basis for making and improving the experimental instrument of the falling ball coefficient of viscosity.

Key words falling ball the liquid of viscosity movement discussion