

一道 CUSPEA 试题解的诠释

王建中

(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 对多本物理教材和参考书引用的一道 CUSPEA 试题其解的物理解释提出了不同的看法.

关键词 质点系 动量 相对速度

中图分类号 G642;O313.4

经李政道教授倡议由我国政府批准设立的中国赴美物理研究生考试(CUSPEA)对中国的物理教学产生了积极的影响.CUSPEA 考题题材广泛,综合性强,重视实验和科学方法的基本训练,紧密结合科学前沿的发展,有较大的启发性和参考价值.因而我国现行的物理教材中,引用了若干 CUSPEA 考题.例如 1983 年的经典物理试卷第一题^[1].有些教材将此题收作习题^[2,3],有些教材将此题作为例题^[4],此题也编入了《物理学难题集萃》^[5,6],也有教材将此题作为思考题^[7],有一本物理习题集也收入了此题^[8],但是,原题解对结果所作的解释似有不妥.

1 CUSPEA 原题、答案及解释

1.1 原 题

一质量为 M 的铁道平板车,可无摩擦地沿一水平直线轨道运动.初始时,车静止不动.有 N 个人立于车上,每个人的质量均为 m .

(a) 当 N 个人一起跑向车的一端,在他们正要跳车时(所有的人都同时跳),他们相对于车的速度均为 u .问 N 个人跳车之后车的速度是多少?

(b) 若 N 个人一个接一个地跳下车(在一个时刻只有一个人在跳),每个人在跳离前,相对于车的相对速度均为 u ,求出平板车末速的表达式.

(c) 在(a)和(b)中,哪种情况下平板车达到的速度较大.

1.2 答案及解释

文献[1]和文献[4~6]给出的解答是一致的.在(a)的情况下,即 N 个人一起跳离平板车,车的末速度为

$$v = \frac{Nm}{M + Nm} u$$

在(b)的情况下,即 N 个人一个一个地跳离平板车,则车的末速度为

$$v_N = \sum_{n=1}^N \frac{m}{M + nm} u$$

显然,在(b)的情况下,当 N 个人一个一个地跳离平板车后,车的末速度较大.

但是,文献[2,3]在把此题收为习题时,还提问道:“所得结果为何不同,其物理原因是什么”.

文献[1]和文献[2~6]都给出了解答或答案,但是没有对“为什么”给出解释.这并不意味着其中的物理原因是显而易见的.文献[9]在计算得到结果后解释说:“ N 个人一个一个地跳车,平板车的末速 v_N 大于 N 个人同时跳下时平板车的末速 v .这是因为平板车对地速度增大后,跳车人仍要以相对平板车为 u 的速度跳下,他对地面的速度亦随之增大.就地面参考系而言,跳车者对平板车所做的功也相应增大,因而平板车得到的能量亦大.所以一个一个地跳车,平板车的末速大.”这样解释欠妥.

2 对解答的分析

实际情况是 N 个人一个一个往下跳时,平板车从静止开始向后逐渐加速.因为车速的方向与人跳跃的方向相反,而人对车的相对速度又是不变的.所以随着车速的逐渐增加,人对地的速度就逐渐变小,而不是“随之增加”.所以原解释欠妥.

乍看,似乎有点困惑. N 个人,一个接一个跳车时,人对地的速度是逐渐变小的,为什么平板车得到的速度反而更大.关键在于,车子不是一次加速,而是逐步加速.加速初期,车子速度较小,因而人对地的速度较大.根据质点系的动量定理,人对地的速度越大,车获得的反向速度也越大.由此分析一下.

在(a)的情况下, N 个人一起跳,由质点系动量定理容易得车速为

$$v = \frac{Nm}{M + Nm} u$$

这是一次加速、“毕其功于一役”,得到的是车的终速.那么 N 个人每人对地的速度,其大小都是

$$v' = u - \frac{Nm}{M + Nm} u = \frac{M}{M + Nm} u$$

在(b)的情况下, N 个人一个一个地跳车,平板车是逐渐加速的,同理可计算,第一个人跳离平板车后,平板车的速度为

$$v_1 = \frac{m}{M + Nm} u$$

因而第一个跳车的人对地的速度为

$$v'_1 = u - v_1 = \frac{M + (N-1)m}{M + Nm} u$$

可以看到 $v_1 < v$,正因为如此,才使得 $v'_1 > v'$,这就是说,(b)中的第一个人对车的加速作用大于(a)中的一个人对车的加速作用.不难想到,在(b)情况下,随着车上人一个一个地跳下,车的速度不断增大, $v_1 < v_2 < v_3 \cdots$,但只要第 i 个人跳车后,车速 $v_i < v$,那么这个人相对地的速度 $v'_i > v'$,相应地,此人对车的加速作用就大于(a)中一个人对车的加速作用.结果, N 个人相继跳离车,车最终获得的速度较大.

若作数值计算,对上述讨论可得到更具体的了解.设平板车的质量 $M = 500\text{kg}$,跳车人数 $N = 10$ 个,每人质量 $m = 50\text{kg}$,人相对于车的相对速度 $u = 8\text{m/s}$.

在(a)的情况下, N 个人一起跳,车速为

$$v = \frac{Nm}{M + Nm} u = \frac{10 \times 50}{500 + 10 \times 50} \times 8 \text{m/s} = 4 \text{m/s}$$

而人对地的速度为

$$v' = u - v = 4 \text{m/s}$$

在(b)的情况下, N 个人相继跳下, 当第 i 个人跳下车时, 车速为

$$v_i = \sum_{n=1}^i \frac{m}{M + (N + 1 - n)m} u$$

第 i 个人对地的速度为

$$v'_i = u - v_i$$

编一个简单的程序可得表 1.

表 1 车速和人对地的速度

跳车人数	车 速	人对地速度	跳车人数	车 速	人对地速度
1	0.4000	7.6006	6	2.7694	5.2306
2	0.8211	7.1789	7	3.3408	4.6592
3	1.2655	6.7345	8	3.9562	4.0438
4	1.7361	6.2639	9	4.6229	3.3771
5	2.2361	5.7639	10	5.3502	2.6498

由表可见, 车上的人一个接一个地跳时, 车子的速度是逐步变大的. 当第 8 个人跳离车子时, 车速已经非常接近 10 人同时跳离而得到的速度; 当第 9 个人跳离车子时, 车速就超过了 10 人同时跳而得到的车速.

3 结 论

N 个人在车上以相同的相对速度依次跳离车子比同时跳离车子, 车子最终获得的速度较快. 在 N 个人依次跳离车子的过程中, 跳车人对地的速度并不是“随之增大”, 而是逐步变小. 正因为起始阶段跳车人对地的速度较大, 车子的最终速度较快.

参 考 文 献

- 1 林纯镇, 吴崇试. 我国赴美物理研究生考试(CUSPEA)历届试题集解(1980-1984). 北京: 高等教育出版社, 1985.111
- 2 马文蔚. 物理学: 上册. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1993.146
- 3 马文蔚. 物理学: 上册. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 1999.103
- 4 梁昆森. 力学: 上册. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1995.247
- 5 陈秉乾, 胡望雨, 舒幼生等. 物理学难题集萃: 上册. 北京: 高等教育出版社, 1993.216
- 6 舒幼生, 胡望雨, 陈秉乾. 物理学难题集萃. 增订本. 北京: 高等教育出版社, 1999.96
- 7 王楚等. 力学. 北京: 北京大学出版社, 1999.98
- 8 马光群等. 大学物理典型题选. 南京: 南京大学出版社, 1986.4
- 9 周谣生, 黄以主, 沈才康. 物理学习题解. 南京: 东南大学出版社, 1993.83

Annotation of the solution to a problem form CUSPEA examination

Wang Jianzhong

(Dept. of Basic Science, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract This paper proposes a physical explanation for the result of a CUSPEA examination problem that used in many physical textbooks.

Key words system of particles momentum relative velocity