杭州应用工程技术学院学报,第 13 卷第 3 期,2001 年 9 月
Journal of Hangzhou Institute of Applied Engineering
Vol. 13 No. 3, Sep. 2001

纤维丛全空间的 Wall 阻碍

陶志雄
(杭州应用工程技术学院 基础部 杭州 310012)

摘 要 如果 X 是一个被有限 CW 复形控制的拓扑空间, F 连通且 $H_*(F:\mathbf{Z})$ 无挠, 本文利用 Wall 阻碍和 Whitehead 挠的关系以及纤维丛全空间与底空间的 Whitehead torsion 间的关系证明了以 F 为纤维型的纤维丛 $p:\widetilde{X}\to X$ 全空间和底空间的 Wall 阻碍满足关系: $p_* w(\widetilde{X})=\sum(-1)^i\theta_{i*}w(X)$.

关键词 Wall 阻碍 Whitehead 挠 纤维丛
中图分类号 O189.2

设 X 是一个拓扑空间. 说 X 被有限地控制(见[1], [2] 等), 若存在一个有限的 CW 复形 K 及映射 $d: K\to X$, $u: X\to K$ 使得 du 同伦于 Id_X. 若 $p:\widetilde{X}\to X$ 是以 F 为纤维型的纤维丛, 本文要解决以下问题: $\widetilde{X}$ 的 Wall 阻碍 $w(\widetilde{X})$ 和 X 的 Wall 阻碍 $w(X)$ 的关系如何?文中证明了定理 A (文中 $\mathbf{Z}$ 为整数环).

定理 A 条件如上, F 是连通的且 $H_*(F;\mathbf{Z})$ 无挠. 则 $\pi_1(X)$ 在 $H_i(F;\mathbf{Z})$ 上的作用诱导了一个自同态 $\theta_{i*}:\widetilde{K}_0(X)\to\widetilde{K}_0(X)$ 同时有

$$p_* w(\widetilde{X})=\sum_i(-1)^i\theta_{i*}w(X)$$

其中 $\widetilde{K}_0(\widetilde{X})$ 和 $\widetilde{K}_0(X)$ 分别表示 $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}\pi_1(\widetilde{X}))$ 和 $\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}\pi_1(X))$, $p_*:\widetilde{K}_0(\widetilde{X})\to\widetilde{K}_0(X)$ 为由 $p_*:\pi_1(\widetilde{X})\to\pi_1(X)$ 诱导的同态.

1 准备

引理 1 设 $p:\widetilde{A}\to A$, $q:\widetilde{B}\to B$ 都是以 F 为纤维型的纤维丛, $\widetilde{\varphi}:\widetilde{A}\to\widetilde{B}$ 为丛映射, $\varphi: A\to B$ 为映射, 且 $q\widetilde{\varphi}=\varphi p$. 则存在映射 $g: M_{\widetilde{\varphi}}\to M_\varphi$ 使其成为以 F 为纤维型的纤维丛. 这里 M_f 表示映射柱(即如果 f 为 A 到 B 的映射, 则 M_f 为 $A\times[0,1]$ 中的 $(x,1)$ 等同于 B 中 $f(x)$ 所得的商空间).

证明 作映射 $g_1:\widetilde{A}\times I\ \amalg\ \widetilde{B}\to A\times I\ \amalg B$ (I 为 $[0,1]$) 使得

$$g_1(y)=\begin{cases}(p(\widetilde{a}),t) & y=(\widetilde{a},t)\in\widetilde{A}\times I\\ q(\widetilde{y}) & y\in\widetilde{B}\end{cases}$$

在 $M_{\widetilde{\varphi}}$ 中 $(\widetilde{a},1)\sim\widetilde{\varphi}(\widetilde{a})$

收稿日期: 2000-12-13
© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在 M_φ 中 $(a, 1) \sim \varphi(a)$

若 $g: M_{\tilde{\varphi}} \to M_\varphi$ 是由 g_1 诱导的, 则它是良定的且必连续.

考察 $\tilde{A}_1 = \{(a, \tilde{b}) \in A \times \tilde{B} \mid \varphi(a) = q(\tilde{b})\} = \varphi^*(\tilde{B})$ 是 $\tilde{B}$ 的拉回. 显然, $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}$ 是等价丛(见文献[3]p. 48). 设 $h: \tilde{A} \to \tilde{A}_1$ 为此等价丛映射且 $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 h$, 则 h 为同胚, 其中 $\tilde{\varphi}_1: \tilde{A}_1 \to \tilde{B}$, $\tilde{\varphi}_1(a, \tilde{b}) = \tilde{b}$. 设 $p_1: \tilde{A}_1 \to A$, $p_1(a, \tilde{b}) = a$, 显然它是一个丛映射满足 $p_1 h = p$. 如果 $\{U_i, \psi_i\}$ 和 $\{V_j, \phi_j\}$ 分别是 A 和 B 关于 p 和 q 的坐标邻域, 则 A 关于 p_1 的坐标邻域为 $\{U_i, h\psi_i\}$. 对于 $b \in V_j$ 和 $\forall a \in \varphi^{-1}(b)$, 取 V_a 为 $\varphi^{-1}(V_j)$ 中含 a 且存在 i 使得 $V_a \subset U_i$ 之开集, 即 V_a 也是 a 的一个坐标邻域. 因此

$$p_1^{-1}(V_a) \subset (ph^{-1})^{-1}(V_a) = hp^{-1}(V_a) \subset hp^{-1}\varphi^{-1}(V_j) = h\tilde{\varphi}^{-1}q^{-1}(V_j) = \tilde{\varphi}_1^{-1}q^{-1}(V_j)$$

即 $\tilde{\varphi}_1 p_1^{-1}(V_a) \subset q^{-1}(V_j)$. 于是可作映射:

$$\psi'_a: V_a \times F \to p_1^{-1}(V_a)$$
$$(x, y) \to (x, \phi_j(\varphi(x), y)) = (x, \phi_{j,\varphi(x)}(y))$$

易证 ψ'_a 是一个同胚(见文献[3]10. 2 节第 47 – 48 页), 故 $\{V_a, \psi'_a\}$ 是 A 的坐标邻域.

作同胚: $\psi''_a: V_a \times F \to p^{-1}(V_a)$ 使得 $\psi''_a = h^{-1}\psi'_a$, 因为

$$\tilde{\varphi}\psi''_a(x, y) = \tilde{\varphi}_1 hh^{-1}\psi'_a(x, y) = \tilde{\varphi}\psi'_a(x, y) = \phi_j(\varphi(x), y)$$

所以

$$\tilde{\varphi}\psi''_a = \phi_j(\varphi \times Id) \tag{1}$$

假设 $0 < \varepsilon < 1$, 作

$$\Psi_j\big|_{V_a \times (1-\varepsilon, 1] \times F}: V_a \times (1-\varepsilon, 1] \times F \to g_1^{-1}(V_j \times (1-\varepsilon, 1])$$
$$(v', t, l) \to (\psi''_a(v', l), t).$$

由于
$$g_1^{-1}(V_a \times (1-\varepsilon, 1]) = p^{-1}(V_a) \times (1-\varepsilon, 1]$$

在 $V_j \times F$ 上, 作 $\Psi_j\big|_{V_j \times F}: V_j \times F \to g_1^{-1}(V_j)$ 使得 $\Psi_j(v, y) = \phi_j(v, y)$

注意到 $(v', 1) \sim \varphi(v')$, 即 $(v', 1, y) \sim (\varphi(v'), y)$, 由(1. 1)

$$\Psi_j(v', 1, y) = (\psi''_a(v', y), 1) \sim \tilde{\varphi}\psi''_a(v', y) \sim \phi_j(\varphi \times Id)(v', y) = \phi_j(\varphi(v'), y)$$

过渡到商空间:

$$\Psi_j: \Big(\bigcup_{a \in \varphi^{-1}(b)} V_a \times (1-\varepsilon, 1] \bigcup_\varphi V_j\Big) \times F \to g^{-1}\Big(\bigcup_{a \in \varphi^{-1}(b)} V_a \times (1-\varepsilon, 1] \bigcup_\varphi V_j\Big)$$

可知 Ψ_j 是良定的, 更进一步可证它是一个同胚. 因此得引理真.

推论 若 $A = B$, $\tilde{A} = \tilde{B}$, $p = q$, 则可作纤维丛 $g: T(\tilde{\varphi}) \to T(\varphi)$.

这里 $T(f)$ 表示映射环, 即若 $f: A \to A$, 则将 M_f 中 $(x, 0)$ 等同于 A 中 X 即得 $T(f)$ (详见[4][5]).

下面我们作一些代数准备(读者可参见文献[6][7]):

设 R 是任何环, $\mathscr{P}(R)$ 是由有限生成的投射右 R- 模和 R- 同态构成的范畴. 设 $\mathscr{P}_A(R)$ 是一个范畴, 它的对象是 (P, f), 这里 P 是 $\mathscr{P}(R)$ 中的对象, $f \in \mathrm{Aut}_R(P)$. 态射 $i: (P_1, f_1) \to (P_2, f_2)$ 是一个 R 同态, 使得 $f_2 i = if_1$. 则 $K_1(R)$ 为满足以下关系的 $\mathscr{P}_A(R)$ 对象的同构类生成的阿贝尔群:

(a) 若 $0 \to (P_2, f_2) \to (P_1, f_1) \to (P_0, f_0) \to 0$

在 $\mathscr{P}_A(R)$ 中正合, 则 $[P_1, f_1] \sim [P_2 + P_0, f_2 + f_0]$ 且

(b) $[P, gf] \sim [P, g] + [P, f]$

这里方括号指同构类.

现设 R 为带有单位元的交换环, π 为一乘法群, $R(\pi)$ 为 R 上由 π 生成的环, 于是 $\mathscr{P}(R(\pi))$ 是 $R(\pi)$ 上有限生成的右 - 投射模范畴. 若 $\sigma: \pi \to \mathrm{Aut}_R(R^n)$ 是反同态, $P \in \mathscr{P}(R(\pi))$, $P \otimes_\sigma R^n$ 是右 $R(\pi)$ - 模即为 $P \otimes_R R^n$ 附加数量乘法:

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(x\otimes y)\alpha = x\alpha\otimes\sigma(\alpha)y \quad \forall\alpha\in\pi$$

线性扩张之. 如果 $f: P_1\to P_2$ 是一个 $R(\pi)$-同态, 则 $f\otimes Id: P_1\otimes_\sigma R^n\to P_2\otimes_\sigma R^n$ 也是 $R(\pi)$-同态, 这因为: 若 $\lambda=\sum_{\alpha\in\pi} r_\alpha\alpha,\ r_\alpha\in R$

$$(f\otimes Id)((x\otimes y)\lambda) = (f\otimes Id)(x\lambda\otimes\sum r_\alpha\sigma(\alpha)y) = (f(x)\lambda\otimes\sum r_\alpha\sigma(\alpha)y)$$
$$= (f(x)\otimes y)\lambda = ((f\otimes Id)(x\otimes y))\lambda$$

引理 **2** (文献[6]) 若 $P\in\mathscr{P}(R(\pi))$, 则 $P\otimes_\sigma R^n\in\mathscr{P}(R(\pi))$.

一个 R^n 自同构是简单的(simple), 如果它在 $\bar{K}_1(R)$ 中是零.

其中 $\bar{K}_1(R) = K_1(R)/\{\pm1\}$. 见文献[6]中引理1.3.

引理 **3** (文献[6])

(1) 若 $\sigma: \pi\to \mathrm{Aut}_R(R^n)$ 是群到 $\mathrm{Aut}_R(R^n)$ 的反同态, 则 σ 诱导了一个自同态:

$$\bar{\sigma}_*: K_1(R(\pi))\to K_1(R(\pi))$$

(2) 若 $\sigma: \pi\to \mathrm{Sim\ Aut}_R(R^n)$ 为 R^n 所有简单自同构, 则 σ 诱导了一个自同态:

$$\sigma_*: K_1(R(\pi))/\{\pm\pi\}\to K_1(R(\pi))/\{\pm\pi\}$$

假设 π 和 π' 均为乘法群, $\mathscr{P}_A(R(\pi))$, $\mathscr{P}(R(\pi'))$ 如上定义. (注: 若 G 为群, 则 $Wh(G) = K_1(\mathbf{Z}(G))/\{\pm G\}$) 见文献[6]中的命题1.1.

引理 **4** $j: \pi\cong\pi'$ 是群同构, 则诱导同构 $j_*: \mathscr{P}_A(R(\pi))\cong\mathscr{P}_A(R(\pi'))$

证明　对于 $\forall(P,f)\in\mathscr{P}_A(R(\pi))$, 因为 P 为 $R(\pi)$-模, 对于 $\forall b\in\pi'$, $\forall p\in P$, 定义 $p\cdot b = p\cdot j^{-1}(b)$. 从而 P 成为一个 $R(\pi')$-模记为 P'. 容易看出 P' 也为 $R(\pi')$-投射模. 定义 $f'(p\cdot b) = f(p)\cdot b$, 线性扩张得 $f'\in \mathrm{Aut}_S(P')$. 显然同态 $j_*: (P,f)\to(P',f')$ 是 $\mathscr{P}_A(R(\pi))$ 到 $\mathscr{P}_A(R(\pi'))$ 的同构.

引理 **5** $\rho: \pi\to\pi'$ 为群同构, $\sigma: \pi\to \mathrm{Aut}_R(R^n)$, $\tau=\sigma\rho^{-1}: \pi'\to \mathrm{Aut}_R(R^n)$, 则 $\rho_*\bar{\sigma}_* = \bar{\tau}_*\rho_*$. 如果 $\sigma: \pi\to \mathrm{Sim\ Aut}_R(R^n)$, 则 $\tau: \pi'\to \mathrm{Sim\ Aut}_R(R^n)$ 且 $\rho_*\sigma_* = \tau_*\rho_*$ (记号同引理3).

其中 ρ_* 为由 ρ 诱导, 它分别指同构 $\rho_*: K_1(R(\pi))\to K_1(R(\pi'))$ 和 $\rho_*: K_1(R(\pi))/\{\pm\pi\}\to K_1(R(\pi'))/\{\pm\pi'\}$.

证明　对于 $x\in K_1(R(\pi))$ 其表示为 (P,f), 由定理4, 同构 ρ_* 下 (P,f) 的象为 (P',f'), 因为 $P\otimes R^n$ 的象为 $P'\otimes R^n$ 且若 $\lambda=\sum_\alpha r_\alpha\alpha,\ \alpha\in\pi$, 则有

$$\rho_*(x\otimes y)\lambda = \rho_*(x\lambda\otimes\sum_\alpha r_\alpha\sigma(\alpha)y) = (\rho(x)\rho(\lambda)\otimes\sum_\alpha r_\alpha\tau\rho(\alpha)y)$$
$$= \rho(x)\rho(\lambda)\otimes\tau\rho(\lambda)y = (\rho(x)\otimes y)\rho(\lambda)$$

因此

$$\rho_*\bar{\sigma}_*(P,f) = \rho_*(P\otimes_\sigma R^n, f\otimes Id) = (P'\otimes_\tau R^n, f'\otimes Id)$$
$$\bar{\tau}_*\rho_*(P,f) = \bar{\tau}_*(P',f') = (P'\otimes_\tau R^n, f'\otimes Id)$$

这样我们有　$\rho_*\bar{\sigma}_* = \bar{\tau}_*\rho_*$

因为 ρ 保持简单自同构. 故知　$\rho_*\sigma_* = \tau_*\rho_*$

设 N 是一个拓扑空间, N 上的有限相对胞腔复形是一个对子 (L,N), $L = L_n\supset L_{n-1}\supset\cdots\supset L_0 = N$, L_{i+1} 由 L_i 附贴一个胞腔得到. 一个基本塌缩和基本扩张的有限序列称为形式形变, $Wh(N) = \{(L,N)\mid L\to N$ 是同伦等价, 且 (L,N) 是有限相对胞腔复形$\}/\sim$, 这里 $(K_1,N)\sim(K_2,N)$ 充要条件是相对于 N K_1 能形式形变成 K_2, 记此等价类为 $[K_1,N]$ 或 $\tau(K_1,N)$. $Wh(N) = Wh(\pi_1 N)$ (注: $Wh(G) = K_1(\mathbf{Z}(G))/\{\pm G\}$, G 为群) 是一个交换群. 若 $f: N\to Y$, 定义 $f_*: Wh(N)\to Wh(Y)$ 使

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

得$f_*[L,N]=[L\bigcup_N M_f, Y]$. $f:(L,N)\to(J,N)$ 是有限相对胞腔复形间的同伦等价$f|_N=Id$, 定义f 的 Whitehead 挠为 $\tau(f)=f_*[M_f,L]\in Wh(J)$, 它是良定的, 见文献[4][8].

设X 为一受有限CW 复形控制的拓扑空间, 即存在一个有限 CW 复形K 及映射 $d:K\to X$, $u:X\to K$ 使得du 同伦于Id_X. 定义映射 $\omega: X\times S^1\to X\times S^1$($S^1$ 为圆周), 使得 $\omega(x,e^{i\theta})=(x,e^{-i\theta})$ 显然它是一个同胚. 设 $\Phi: T(\alpha)\to X\times S^1$是同伦等价, 定义 $\beta(X)=\Phi_*\tau(\Phi^{-1}\omega\Phi)\in Wh(X\times S^1)$, 这里 $\tau(\Phi^{-1}\omega\Phi)$ 是同伦等价 $\Phi^{-1}\omega\Phi: T(\alpha)\to T(\alpha)$ 的 Whitehead 挠[4].

引理 **6**(文献[4]) $\beta(X)$ 是良定的, 且 $\beta(X)=0$ 的充要条件是 X 同伦等价于某个有限 CW 复形.

另外, 我们有下列函子直和分解由文献[5][10]:

$$Wh(X\times S^1)=Wh(X)\oplus Nil(X)\oplus Nil(X)\oplus \widetilde{K}_0(X)$$

这里 $Nil(X)$ 表示 $Nil(\mathbf{Z}\pi_i(X))$

定义 **7** 文献[5][11] Wall 有限阻碍 $w(X)$ 是 $Wh(X\times S\backslash+1)$ 分解中 $\beta(X)$ 在 Bass-Heller-Swan 映射下的象, 简记此映射为 B-H-S, 它具有自然性.

如果 $p:E\to B$ 是以F 为纤维型的纤维丛, $A\subset B$ 是B 的形变收缩核. 易知 $E_A=p^{-1}(A)$ 是E 的形变收缩核.

定理 **8** [6] 如果 F 连通, 且$H_*(F;\mathbf{Z})$ 无挠, 则 $\pi_1(B)$ 在 $H_i(F;\mathbf{Z})$ 上的作用 σ_i 决定了一个 $Wh(\pi_1(B))$ 的自同态 σ_{i*} 且 $p_*\tau'(E,E_A)=\sum_i(-1)^i\sigma_{i*}\tau'(B,A)$.

此处 p_* 指由 $p_*:\pi_1(E)\to\pi_1(B)$ 诱导的映射 $p_*: Wh(\pi_1(E))\to Wh(\pi_1(B))$.

必须要指出的是, 此处 $\tau'(E,E_A)\in Wh(E)$, 而 Cohen M M. 和 Ferry S. 的定义(见文献[4] 和 [9])中所用的$\tau(E,E_A)\in Wh(E_A)$, 两定义相差一个收缩映射诱导的同构.

最后我们给出$\widetilde{K}_0(X)=\widetilde{K}_0(\mathbf{Z}\pi_1(X))$ 的定义, 如文献[12][10]:

一般来说, 假设 Λ是有单位元的环, 投射模群$K_0\Lambda$是一个加法群, 其生成元[P] 是 Λ上的有限生成投射模 P 的同构类, 若[P], [Q] 均为 $K_0\Lambda$ 中之元, 则其加法定义如下:

$$[P]+[Q]=[P\oplus Q]$$

对于域 S, 我们可自然地定义同态$j:\Lambda\to S$, 于是得同态$j_*:K_0\Lambda\to K_0S\cong\mathbf{Z}$, 如果 Λ是交换的, 则记$\widetilde{K}_0(\Lambda)=\ker(j_*)$ (j_* 的核) 它是 $K_0\Lambda$ 中的理想, 而且 $K_0\Lambda\cong\mathbf{Z}\oplus\widetilde{K}_0(\Lambda)$.

2 定理 A 的证明

因为 $d:K\to X$, $u:X\to K$, $du\simeq Id$. 取 $\alpha=ud:K\to K$, $\widetilde{K}=d^*\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_1=u^*\widetilde{K}$. 由 d 和u 分别诱导了丛映射 $\tilde{d}:\widetilde{K}\to\widetilde{X}$ 和$\tilde{u}:\widetilde{X}_1\to\widetilde{K}$, 以及投射 $q:\widetilde{K}\to K$, $\varphi:\widetilde{X}_1\to X$. 于是有下列交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_1 \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "\varphi"] & \widetilde{K} \arrow[r, "\tilde{d}"] \arrow[d, "q"] & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "u"] & K \arrow[r, "d"] & X
\end{tikzcd} \tag{2}$$

由上条件知$\widetilde{X}_1$ 和$\widetilde{X}$ 为等价丛, 于是有丛等价映射 $\tilde{h}:\widetilde{X}\to\widetilde{X}_1$ 使得 $\varphi\tilde{h}=p$. 设 $\tilde{\alpha}=(\tilde{u}\tilde{h})\tilde{d}$, 注意到 $du\simeq Id$, 因此有 $\tilde{d}\tilde{u}\tilde{h}\simeq\tilde{h}_1$, 其中 $\tilde{h}_1:\widetilde{X}\to\widetilde{X}$ 使得$p\tilde{h}_1=p$(由同伦复盖定理即可得), 因而 $\tilde{h}_1$ 是同胚(丛映射). 于是不难修改 $\tilde{h}$ 可使得: $\tilde{d}\tilde{u}\tilde{h}\simeq Id$. 所以 $q\tilde{\alpha}=qu\tilde{h}\tilde{d}=u\varphi\tilde{h}\tilde{d}=up\tilde{d}=udq=\alpha q$ 故由引理 1 不难得到存在映射 $g:T(\tilde{\alpha})\to T(\alpha)$ 使其成为一个以 F 为纤维型的纤维丛. 令 $\widetilde{\Phi}$和 $\widetilde{\Phi}_1$ 分别为 Φ和 Φ^{-1} 诱导的全空间的丛映射, 于是有下列交换图表:

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{tikzcd} \tilde X\times S^1 \arrow[r, "\tilde\Phi_1"] \arrow[d, "p\times Id"'] & T(\tilde\alpha) \arrow[r, "\tilde\Phi"] \arrow[d, "g"] & \tilde X\times S^1 \arrow[d, "p\times Id"] \\ X\times S^1 \arrow[r, "\Phi^{-1}"] & T(\tilde\alpha) \arrow[r, "\Phi"] & X\times S^1 \end{tikzcd} \tag{3}$$

因为 $\Phi^{-1}\Phi\simeq Id$, 仿前做法设 $\tilde\Phi_1^{-1}\tilde\Phi\simeq Id$. 又因为 $\Phi\Phi^{-1}\simeq Id$(见引理 6), 由同伦复盖性质知 $\tilde\Phi\tilde\Phi_1^{-1}\simeq h$, h 为 $\tilde X\times S^1$ 到自身的丛映射满足 $(p\times Id)h = p\times Id$ 且它是同胚, 故有 $\tilde\Phi\simeq\tilde\Phi(\tilde\Phi_1\tilde\Phi)\simeq h\tilde\Phi$, $\tilde\Phi\tilde\Phi_1\simeq h\tilde\Phi\tilde\Phi_1$ 即 $h\simeq h^2$, 从而 $h\simeq Id$. 由此即得 $\tilde\Phi\tilde\Phi_1\simeq Id$, 也就是 $\tilde\Phi$ 是一个同伦等价, 而 $\tilde\Phi_1$ 是它的同伦逆. 于是有: $\beta(\tilde X)=\tilde\Phi_*\tau(\tilde\Phi_1\tilde\omega\tilde\Phi)=\tilde\Phi_*\tau(\overline\Psi)$, 其中 $\overline\Psi=\tilde\Phi_1\tilde\omega\tilde\Phi$, $\tilde\omega$ 为 $\tilde X\times S^1$ 到自身的映射满足 $\tilde\omega(\tilde x, e^{i\theta})=(\tilde x, e^{-i\theta})$.

由引理 1, $f: M_{\overline\Psi}\to M_\Psi$ 是以 F 为纤维型的纤维丛, $\Psi=\Phi^{-1}\omega\Phi$. 映射 ω 如前, 易得 $p': M_{\overline\Psi}\bigcup_{T(\tilde\alpha)\times 0}M_{\overline\Psi}\to M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi$ 是以 F 为纤维型的纤维丛(注意到: $T(\tilde\alpha)=(p')^{-1}T(\alpha)$), $p'|_{T(\tilde\alpha)}=g$).

又 $\pi_1(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi)$ 在 $H_i(F;\mathbf{Z})$ 上的作用 $\sigma_i: \pi_1(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi)\to \mathrm{Aut}(H_i(F;\mathbf{Z}))$ 诱导了自同态 $\sigma_{i*}: Wh(\pi_1(M_\Psi)\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi))\to Wh(\pi_1(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi))$. 因为 $T(\tilde\alpha)$, $T(\alpha)$ 分别为 $M_{\overline\Psi}\bigcup_{T(\tilde\alpha)\times 0}M_{\overline\Psi}$, $M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi$ 的强形变收缩核, 记这些收缩映射分别为 ξ 和 η. 于是有 $\eta p'=g\xi$, 即在基本群的情形有 $\eta_* p'_* = g_*\xi_*$. 取 $\kappa_i=\sigma_i\eta_*^{-1}$, 则 $\kappa_i=\pi_1(T(\alpha))\to \mathrm{Aut}(H_i(F;\mathbf{Z}))$ 就是 $\pi_1(T(\alpha))$ 在 $H_i(F;\mathbf{Z})$ 上的作用. 从引理 5 及文献[6]定理 3.1 的证明可知:

$$\eta_*\sigma_{i*}=\kappa_{i*}\eta_* \tag{4}$$

注意到文献[6]和 Cohen 关于(torsion)挠的定义的不同及其关系(前者记为 τ', 后者记为 τ).
所以

$$\begin{aligned} g_*\tau(\overline\Psi) &= \eta_* p'_*\xi_*^{-1}\overline\Psi_*\tau(M_{\overline\Psi}, T(\tilde\alpha)\times 0) \\ &= \eta_* p'_*\xi_*^{-1}\tau(M_{\overline\Psi}\bigcup_{T(\tilde\alpha)\times 0}M_{\overline\Psi}, T(\tilde\alpha)) \\ &= \eta_* p'_*\tau'(M_{\overline\Psi}\bigcup_{T(\tilde\alpha)\times 0}M_{\overline\Psi}, T(\tilde\alpha)) \\ &= \eta_*\sum_i(-1)^i\sigma_{i*}\tau'(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi, T(\alpha)) \qquad (\text{引理}8) \\ &= \sum_i(-1)^i\kappa_{i*}\eta_*\tau'(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi, T(\alpha)) \qquad (\text{由图表}(3)) \\ &= \sum_i(-1)^i\kappa_{i*}\tau(M_\Psi\bigcup_{T(\alpha)\times 0}M_\Psi, T(\alpha)) = \sum_i(-1)^i\kappa_{i*}\tau(\Psi) \end{aligned}$$

由引理 6、图表(2)等

$$(p\times Id)_*\beta(\tilde X)=(p\times Id)_*\tilde\Phi_*\tau(\overline\Psi)=\Phi_* g_*\tau(\overline\Psi)=\sum_i(-1)^i\Phi_*\kappa_{i*}\tau(\Psi)$$

令 $\tau_i=\kappa_i\Phi_*^{-1}$, 则 $\tau_i: \pi_1(X\times S^1)\to \mathrm{Aut}(H_i(F;\mathbf{Z}))$ 就是 $\pi_1(X\times S^1)$ 在 $H_i(F;\mathbf{Z})$ 上的作用. 由引理 5 得 $\Phi_*\kappa_{i*}=\tau_{i*}\Phi_*$, 从而

$$(p\times Id)_*\beta(\tilde X)=\sum_i(-1)^i\tau_{i*}\Phi_*\tau(\Psi)=\sum_i(-1)^i\tau_{i*}\beta(X)$$

由(B-H-S)的自然性并注意到 $\theta_i=\tau_i|_{\pi_1(X)\times 1}$ 我们有

$$\begin{aligned} p_* w(\tilde X) &= p_*(\text{B-H-S})\beta(\tilde X)=(\text{B-H-S})(p\times Id)_*\beta(\tilde X) \\ &= (\text{B-H-S})\sum_i(-1)^i\tau_{i*}\beta(X)=\sum_i(-1)^i\theta_{i*}(\text{B-H-S})\beta(X) \\ &= \sum_i(-1)^i\theta_{i*}w(X) \end{aligned}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnk

这样就完成了定理A 的证明.

参 考 文 献

1 Mather M. Counting homotopy types of manifolds. Topology, 1965, 4: 93~ 94

2 Spanier E H. Algebraic Topology. New York: McGraw Hill, 1966

3 Steenrod N E. The topology of fiber bundles. Princeton NJ: Princeton Univ Press, 1951

4 Ferry S. A simple-homotopy approach to the finiteness obstruction. Shape Theory and Geo. Topology, Berlin: Springer Verlag, 1981. 73~ 81

5 Kwasik S. Wall obstruction and Whitehead torsion. Comment Math Helv, 1983, 58: 503~ 508

6 Anderson D R. The Whitehead torsion of the total space of a fiber bundle. Topology, 1972, (11): 179~ 194

7 陈昭木. 同调代数初步. 福州: 福建科学技术出版社, 1984

8 Milnor J. Whitehead torsion. Bull AMS, 1966, 72: 358~ 426

9 Cohen M M. A course in simple-homotopy theory. Berlin: Springer verlag, 1970

10 Bass H. Algebraic K-Theory. New York: Benjamin, 1968

11 Wall C T C. An obstruction to finiteness of CW-complexes. Bull AMS, 1964, 70: 267~ 270

12 Milnor J. Introduction to Algebraic K-theory. Princeton NJ: Princeton Univ Press, 1971

13 Gersten S. A product formula for Wall's obstruction. Amer J Math, 1966, 88: 337~ 346

Wall obstruction of the total space of a fiber bundle

Tao Zhixiong

(Department of Basic Science, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract If X is a topological space dominated by a finite CW complex, F is connected and $H_*(F;\mathbf{Z})$ torsion free. By using the relation between Wall obstruction and Whitehead torsion, and the relation of the Whitehead torsions between the total space and the base space of a fiber bundle, this paper proves that the Wall obstruction of a fiber bundle $p:\widetilde{X}\to X$ with fiber F satisfies: $p_* w(\widetilde{X})=\sum(-1)^i\theta_{i*}w(X)$

Key words Wall obstruction Whitehead torsion fibre bundle

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnk