

点位放样的精度探讨

杜国标

(杭州应用工程技术学院 土木系 杭州 310012)

摘 要 根据间接平差原理和误差理论, 对工程测量中常用的放样方法进行了精度分析; 讨论了控制点误差对放样点精度的影响情况; 通过算例, 了解测设放样元素误差和控制点误差对放样点精度的影响规律; 在此基础上, 提出建议供实际工作中参考。

关键词 放样元素 观测元素 放样点 控制点

中图分类号 TU198

点位放样是工程测量中一项重要工作。放样点误差大小直接影响到工程的施工质量, 尤其随着大型、精密工程建设的不断增加, 放样点的精度问题已越来越受到重视和注意。点位放样一般分为直接法和归化法二种, 按不同的作业方式又可分为极坐标法、角度交会法、距离交会法等等。点位放样的精度分析包括测设放样元素的误差影响和控制点误差的影响两部分。本文首先根据间接平差理论推导了放样点精度的一般公式, 在此基础上, 对不同的放样方法进行了具体讨论, 然后根据误差理论, 对顾及控制点误差时的点位放样精度作了进一步的探讨。旨在完善放样点位的误差理论, 为指导实际工作提供理论依据。

1 直接法放样的点位精度

直接法放样是在控制点上, 通过测设放样元素(角度、边长)将点位直接放出。在点位放样精度要求不高时, 这是经常使用的一种方法。直接法放样的点位误差主要来源于测设放样元素的误差(暂不考虑控制点误差), 而测设放样元素的误差对放样点的影响关系式, 可通过间接平差理论建立起来。如图 1 所示, A、B 为控制点, P 为待放点。角度 β_1 , β_2 边长 S_1 , S_2 为放样元素。此时放样元素与放样点间的误差关系式(误差方程)为

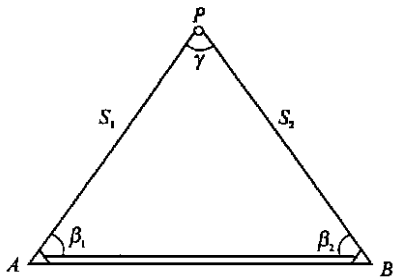


图 1 放样示意图

$$d\beta_1 = \frac{\Delta y_{AP}}{S_1^2} dx_p - \frac{\Delta x_{AP}}{S_1^2} dy_p \tag{1}$$

$$d\beta_2 = \frac{\Delta y_{BP}}{S_2^2} dx_p + \frac{\Delta x_{BP}}{S_2^2} dy_p \tag{2}$$

$$ds_1 = \frac{\Delta x_{AP}}{S_1} dx_p + \frac{\Delta y_{AP}}{S_1} dy_p \tag{3}$$

$$ds_2 = \frac{\Delta x_{BP}}{S_2} dx_p + \frac{\Delta y_{BP}}{S_2} dy_p \tag{4}$$

则误差方程系数阵

$$B = \begin{pmatrix} \Delta y_{AP}/S_1^2 & -\Delta x_{AP}/S_1^2 \\ -\Delta y_{BP}/S_2^2 & \Delta x_{BP}/S_2^2 \\ \Delta x_{AP}/S_1 & \Delta y_{AP}/S_1 \\ \Delta x_{BP}/S_2 & \Delta y_{BP}/S_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

若测设角度的中误差为 $m\beta_1, m\beta_2$, 测设边长的中误差为 ms_1, ms_2 , 取单位权中误差为 m_0 , 则放样元素的权阵

$$P = \begin{pmatrix} m_0^2/m^2\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0^2/m^2\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_0^2/m^2s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_0^2/m^2s_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

由下式构成法方程系数矩阵

$$N = B^T P B \tag{7}$$

则放样点 P 的协因数阵

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} \tag{8}$$

点位中误差

$$m_p = \pm m_0 \cdot (Q_{xx} + Q_{yy})^{1/2} \tag{9}$$

(9)式即为由测设放样元素误差引起的放样点中误差。针对不同的放样方法, 均可由(1)–(9)式求出相应放样点的中误差。下面仅对两个放样元素时的情况进行讨论。

(1) 极坐标法放样

图2 为极坐标法放样的示意图, 此时放样元素为 S_1, β_1 。取(1)、(3)两式, 并设 $m_0 = m\beta_1$, 则相应的误差方程系数阵及权阵为

$$B = \begin{pmatrix} \Delta y_{AP}/S_1^2 & -\Delta x_{AP}/S_1^2 \\ \Delta x_{AP}/S_1 & \Delta y_{AP}/S_1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_0^2/m^2s_1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

经(7)、(8)、(9) 式计算, 可得放样点中误差

$$m_p^2 = \left[\frac{s_1 m_0}{\rho} \right]^2 + m^2 S_1 \tag{12}$$

(2) 角度交会法放样

图3 为角度交会法放样的示意图, 此时放样元素为 β_1, β_2 。取(1)、(2) 两式, 并设 $m_0 = m\beta_1 = m\beta_2$, 相应的误差方程系数阵及权阵为

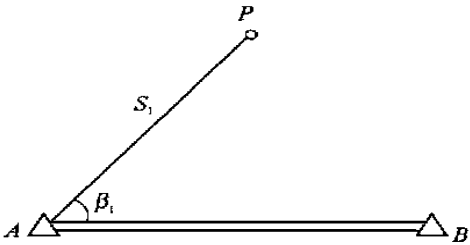


图2 极坐标法示意图

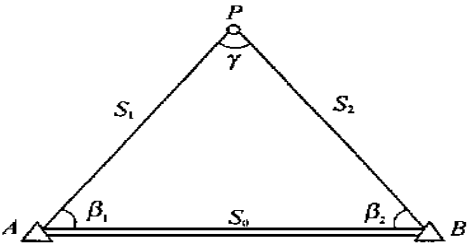


图3 角度交会法示意图

$$B = \begin{pmatrix} \Delta y_{AP}/S_1^2 & -\Delta x_{AP}/S_1^2 \\ -\Delta y_{BP}/S_2^2 & \Delta x_{BP}/S_2^2 \end{pmatrix}$$

(13)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(14)

则放样点中误差

$$m_p^2 = \left(\frac{m_0^2 \cdot s_0}{\rho \cdot \sin^2 \gamma} \right)^2 (\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2)$$

(15)

(3) 距离交会法放样

图 4 为距离交会法放样的示意图, 此时放样元素为 S_1, S_2 。

取(3), (4)两式, 并设 $m_0 = m_{S1} = m_{S2}$, 相应的误差方程系数阵及权阵为

$$B = \begin{pmatrix} \Delta x_{AP}/S_1 & \Delta y_{AP}/S_1 \\ \Delta x_{BP}/S_2 & \Delta y_{BP}/S_2 \end{pmatrix}$$

(16)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(17)

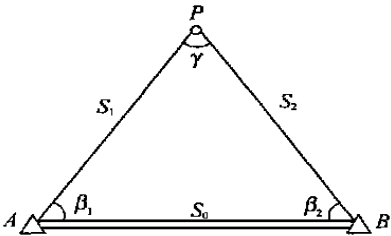


图 4 距离交会法示意图

则放样点中误差

$$m_p^2 = \frac{2m_0^2}{\sin^2 \gamma}$$

(18)

其它放样方法或具有多余放样元素时, 也可按上述原理进行相应数计算, 最后求出放样点的中误差。

2 归化法放样的点位精度

当放样点精度要求较高时, 通常在直接法放样的基础上对初放点进行归化改正, 即所谓的归化法放样。如图 5 所示, 采用归化法放样时, 首先测出由 A, B, P' 构成的三角形中的角度或边长(观测元素), 并求出 P' 点的坐标 x', y' , 然后根据 x', y' 与 P 点的设计坐标 x, y 之差 $\Delta x, \Delta y$ 对 P' 点进行归化, 最后定出 P 点。因此, 这种放样方法的点位精度主要取决于实测观测元素的精度(暂不考虑控制点误差)。与直接法放样时的情况进行比较可知, 前者是测设放样元素误差对放样点产生的影响, 而后者则是测量观测元素误差对放样点产生的影响, 但其影响规律是一样的。所以仍可按上述原理写出在不同观测元素时放样点 P 的点位中误差, 即观测 S_1, β_1 时, 按(12)式计算; 观测 β_1, β_2 时, 按(15)式计算; 观测 S_1, S_2 时, 按(18)式计算。其中 $m_{S1}, m_{\beta1}, m_{S2}, m_{\beta2}$ 是测量观测元素 $s_1, \beta_1, s_2, \beta_2$ 的中误差。由于测量观测元素的精度往往高于测设放样元素的精度, 因此, 归化法放样的点位精度一般高于直接法放样。

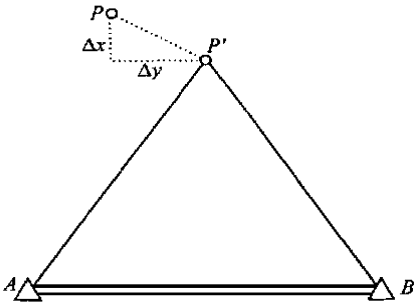


图 5 归化法放样示意图

3 控制点误差对放样点精度的影响^[1]

工程测量中, 一般是根据设计部门提供的建筑物特征点(待放点)的设计坐标和控制点的已知坐标反算放样元素, 再由控制点及放样元素将待放点测设至地面。因此放样点的误差除受测设放

样元素(直接法放样)或测量观测元素(归化法放样)的误差影响外,还要受到控制点坐标误差的影响。

控制点坐标误差对放样点精度的影响,在直接法放样时主要表现在对放样点的直接影响、对后视(定向)方向的影响及对反算放样元素的影响。归化法放样时,其影响主要表现在对放样点的直接影响、对后视方向的影响及对测量元素的影响。若视第三项影响相同,则控制点误差对放样点精度的影响情况亦相同。因此,仅以直接法放样为例,讨论控制点误差对放样点精度的影响。

在图 6 中, P 为待放点, 已知其设计坐标 x_P, y_P (无误差), $A、B$ 为控制点, 其坐标 x_A, y_A, x_B, y_B 已在事先布设的工程控制网平时求出, 相应坐标的方差——协方差阵

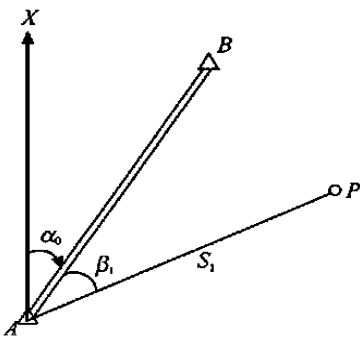


图 6 放样示意图

$$D_0 = \begin{pmatrix} m_{x_A x_A}^2 & m_{x_A y_A} & m_{x_A x_B} & m_{x_A y_B} \\ m_{y_A x_A} & m_{y_A y_A}^2 & m_{y_A x_B} & m_{y_A y_B} \\ m_{x_B x_A} & m_{x_B y_A} & m_{x_B x_B}^2 & m_{x_B y_B} \\ m_{y_B x_A} & m_{y_B y_A} & m_{y_B x_B} & m_{y_B y_B}^2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

待放点坐标与控制点坐标及放样元素间的函数关系可表示为

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x_A + s \cos(\alpha_0 + \beta_1) \\ y_P &= y_A + s \sin(\alpha_0 + \beta_1) \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

对(21)式全微分得

$$\left\{ \begin{aligned} dx_p &= dx_A + \cos \alpha_1 ds_1 - s_1 \sin \alpha_1 d\alpha_0 - s_1 \sin \alpha_1 d\beta_1 \\ dy_p &= dy_A + \sin \alpha_1 ds_1 + s_1 \cos \alpha_1 d\alpha_0 + s_1 \cos \alpha_1 d\beta_1 \end{aligned} \right. \tag{21}$$
$$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_1$$

由上式可知, 因 x_A, y_A, x_B, y_B 存在误差, 则对放样点的直接影响为 dx_A, dy_A , 对后视方向的影响为 $d\alpha_0$, 对放样元素的影响为 $ds_1, d\beta_1$ 。根据坐标与边长、方位角及角度间的微分关系有

$$ds_1 = F_{s1} \cdot d_0 \tag{22}$$

$$d\beta_1 = F_{\beta_1} \cdot d_0 \tag{23}$$

$$d\alpha_0 = F_{\alpha_0} \cdot d_0 \tag{24}$$

其中

$$F_{s1} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$F_{\beta_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha_0}{s_0} & \frac{\sin \alpha_1}{s_1} & \frac{\cos \alpha_1}{s_1} & \frac{\cos \alpha_0}{s_0} & -\frac{\sin \alpha_0}{s_0} & \frac{\cos \alpha_0}{s_0} \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$F_{\alpha_0} = \begin{pmatrix} \frac{\sin \alpha_0}{s_0} & -\frac{\cos \alpha_0}{s_0} & -\frac{\sin \alpha_0}{s_0} & \frac{\cos \alpha_0}{s_0} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$d_0 = (dx_A \quad dy_A \quad dx_B \quad dy_B)^T \tag{28}$$

将(22)~(24)式代入(21)式, 并设

$$\left. \begin{aligned} F_{x_A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F_{y_A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

则有

$$\left. \begin{aligned} d_{x_p} &= F_x \cdot d_0 \\ d_{y_p} &= F_y \cdot d_0 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{x_A} + \cos \alpha_1 F_{s_1} - s_1 \sin \alpha_1 F_{\alpha_0} - s_1 \sin \alpha_1 F_{\beta_1} \\ F_y &= F_{y_A} + \sin \alpha_1 F_{s_1} + s_1 \cos \alpha_1 F_{\alpha_0} + s_1 \cos \alpha_1 F_{\beta_1} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

(29) 式即为极坐标法放样时控制点误差对放样点的影响, 其中误差形式为

$$\left. \begin{aligned} m_{x_p}^2 &= F_x \cdot D_0 \cdot F_x^T \\ m_{y_p}^2 &= F_y \cdot D_0 \cdot F_y^T \\ m_p &= \pm \sqrt{m_{x_p}^2 + m_{y_p}^2} \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

上述推导方法和过程以及 (30)、(32) 等式适用于距离交会法放样和角度交会法放样, 但在不同的放样方法中, F_x, F_x^T, F_y, F_y^T 是不同的。因篇幅所限, 此处不再做详细讨论。下面算例中直接给出了计算结果。

4 算例分析

前面对测设放样元素误差和控制点误差对放样点位的影响, 从理论上进行了讨论, 得到 (12), (15), (18) 及 (31) 式。下面根据这些公式作一算例, 以便对点位放样的精度进行定量分析。

图 7 为一放样图形(基本图形 I), A、B 为控制点, P 为待放点, 各点坐标见图; 为了解放样图形对点位放样精度的影响, 设一组比较图形 II~ V(A、B 点坐标不变, 改变 P 点的设计坐标), 相应图形的 P 点坐标见表 1。

表 1 图 7P 点坐标变化表

图形	X (m)	Y(m)
I	50	50
II	40	60
III	30	70
IV	20	80
V	10	90

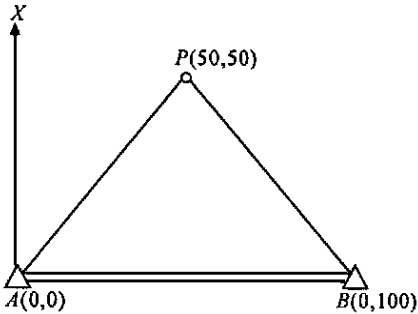


图 7 放样实例示意图

为比较不同精度控制点对放样点位的影响, 分析控制点误差对放样点的影响大小, 采用了一组基本精度和一组比较精度进行计算。

基本精度:

控制点坐标的方差——协方差阵

$$D_0 = \begin{pmatrix} 4.5 & -2.1 & -1.0 & -1.6 \\ -2.1 & 3.8 & 2.5 & 2.9 \\ -1.0 & 2.5 & 7.1 & 3.8 \\ -1.6 & 2.9 & 3.8 & 8.6 \end{pmatrix} \quad (\text{mm})^2$$

角度和边长放样的精度分别为

$m\beta=\pm4''$

$m_s=\pm5\text{ mm}$

比较精度:

控制点坐标的方差——协方差阵

$$D'_0=\begin{pmatrix} 25 & 4 & 9 & 4 \\ 4 & 64 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 49 & 9 \\ 4 & 9 & 9 & 36 \end{pmatrix} \quad (\text{mm})^2$$

角度和边长放样的精度分别为

$m'\beta=\pm8''$

$m_s=\pm8\text{ mm}$

(1) 测设放样元素的误差对放样点精度的影响

根据(12)式,取 $m_0= m\beta、m\beta'$, $ms_1= ms、ms'$;根据(15)式,取 $m_0= m\beta、m\beta'$;根据(18)式,取 $m_0= ms'、ms$,计算出不同放样方法放样 P 点的中误差列于表 2 第 3,4 列。

(2) 控制点误差对放样点精度的影响

分别将(25),(26),(27),(29)式代入(31)式求得 $F_x、F_y$,与 $D_0、D'_0$ 一起代入(32)式,计算出放样 P 点的中误差(M_0)列于表 2 第 5,6 列。

(3) 数据分析

计算放样点总误差(M)列于表 2 第 7,9,11,13 列,计算控制点误差影响的平方与放样点总误差的平方之比列于表 2 第 8,10,12,14 列。

表 2 点位放样误差分析表

(mm)

方 图		放样误差		控制点误差		总误差及比例关系							
		影 响	影 响	影 响	影 响								
法 形		$m\beta、ms$	$m\beta'、m'$	D_0	D'_0								
极坐标法	1 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	I	5.2	8.5	3.4	14.5	6.2	0.30	15.4	0.89	9.2	0.14	16.8	0.74
	II	5.2	8.5	3.5	13.1	6.3	0.31	14.1	0.86	9.2	0.14	15.6	0.70
	III	5.2	8.5	3.6	12.4	6.3	0.32	13.4	0.85	9.2	0.15	15.0	0.68
	IV	5.3	8.7	4.0	12.3	6.6	0.36	13.4	0.84	9.6	0.17	15.1	0.67
距离交会法	V	5.3	8.7	4.6	12.9	7.0	0.43	13.9	0.86	9.8	0.22	15.6	0.69
	I	7.1	11.3	6.8	23.3	9.8	0.48	24.4	0.92	13.2	0.26	25.9	0.81
	II	6.8	10.9	8.6	33.1	11.0	0.62	33.8	0.96	13.9	0.38	34.8	0.90
	III	6.7	10.8	12.3	51.3	14.0	0.77	51.7	0.98	16.4	0.56	52.4	0.96
	IV	6.2	9.8	20.4	89.6	21.3	0.92	89.8	0.995	22.6	0.81	90.1	0.988
角度交会法	V	6.9	11.0	46.0	207.9	46.5	0.98	208.0	0.999	47.3	0.94	208.2	0.997
	I	1.9	3.9	6.2	17.9	6.5	0.91	18.0	0.989	7.3	0.72	18.3	0.955
	II	1.8	3.6	5.5	15.7	5.8	0.90	15.8	0.987	6.6	0.70	16.1	0.950
	III	1.8	3.6	5.0	14.1	5.3	0.88	14.2	0.984	6.2	0.66	14.6	0.94
	IV	2.0	3.9	4.7	13.3	5.1	0.85	13.4	0.987	6.1	0.59	13.9	0.92
	V	2.3	4.6	4.8	13.2	5.3	0.81	13.4	0.970	6.6	0.52	14.0	0.86

由表 2 数据可知:

①测设放样元素误差的影响与测设放样元素的误差成正比变化,其变化率与测设放样元素误差的变化率一致;

②测设放样元素误差的影响和控制点误差的影响均与放样图形有关,尤其是距离交会法放样,控制点误差影响受图形影响较大;

③控制点误差的影响与控制点误差成正比变化,且在多数情况下都超过或接近测设放样元素误差的影响,其中尤以距离交会放样时最为明显。因此,一般情况下,不能忽略控制点误差对放样点的影响;

④控制点误差影响的平方与放样点总误差的平方之比,与测设放样元素误差及控制点误差有关,当两者比例关系相适应时,可忽略控制点误差的影响。如测设放样元素误差为 ms' 、 $m\beta$, 控制点误差为 D_0 , 采用极坐标放样时,即可忽略 D_0 的影响。

5 结束语

通过理论分析和实例计算,对测设放样元素误差和控制点误差对放样点的影响问题有了比较全面的了解,在此基础上,提出以下几点建议供实际工作中参考:

(1) 在直接法放样的基础上进行归化法放样时,需精确测定相应的观测元素。应注意测量观测元素的精度一定要高于测设放样元素的精度,否则将达不到提高放样点精度的目的。

(2) 改善放样点精度还可通过提高测设放样元素的精度或提高控制点的精度或针对具体放样条件,根据理论公式寻找最佳放样图形的途径来实现。

(3) 当 $M_0^2/M^2 \leq 0.2$ 时,可忽略控制点误差对放样点精度的影响^[2]。因此,在需要的情况下,可根据控制点精度和所能实施的测设放样元素的精度,由文中相应公式计算 M_0^2/M^2 ,以此判断是否考虑控制点误差的影响。换句话说,可通过调整测设放样元素的精度或控制点的精度以达到忽略控制点误差影响的目的。

参 考 文 献

- 1 孔祥元. 武汉测绘科技大学学报. 原始数据误差对放样点精度影响的探讨, 1988, (2): 11~ 23
- 2 李青岳. 工程测量学. 北京: 测绘出版社, 1982
- 3 季斌德, 邵自修. 工程测量. 北京: 测绘出版社, 1988

Accuracy study of setting out point position

Du Guobiao

(Dept. of Civil Engineering, Hangzhou Institute of Applied Engineering, Hangzhou 310012)

Abstract In this paper, according to the principle of adjustment of indirect observations and the error theory, setting out accuracy of setting out methods used usually in engineering survey are analysed. The effect of control point errors on setting out point accuracy is discussed. The effect laws of setting out element errors and control point errors on setting out point accuracy are known by a computation example. On the basis of this, the opinions are advanced for reference in practical work.

Key words setting out element observation element setting out point control point