

关于超静定结构位移计算公式的推导

吴必龙

(浙江科技学院 土木工程系, 浙江 杭州 310012)

摘要:力法是计算超静定结构的一种基本而有效的方法.本文运用力法的一般思路来分析超静定结构的位移计算问题,同时说明“虚功原理”的重要性.

关键词:力法;超静定结构;位移计算;虚功原理

中图分类号: TU311.4

文献标识码: A

文章编号: 1008-7680(2001)04-0011-04

《结构力学》课程是工民建和建筑工程等专业的一门重要专业基础课,对这门课程的全面扎实的掌握是学好专业课的关键.龙驭球、包世华编的《结构力学教程》是1991国优教材,其内容丰富、阐述仔细全面,深入浅出,深得读者的赞誉.本人多年使用该教材,也获益匪浅,深受启发.为了更好地理解和掌握课程内容,提高学习效率,对某些细节问题,作些探讨.

力法是计算超静定结构的一种基本而有效的方法,这种古老的计算方法为很多领域所广泛采用,理论体系很成熟.这里,我们试图用一般思路来分析这样一个问题:对超静定结构进行位移计算时,其计算公式是如何得到的?

1 提出问题

在《结构力学》中,应用“虚功原理”是计算结构位移的一个有效方法.根据这个原理,可以得到结构在荷载作用下弹性位移的一般公式^[1]:

$$\Delta = \sum \int (\underline{M}M/EI)ds + \sum \int (\underline{N}N/EA)ds + \sum \int (k\underline{Q}Q/GA)ds \quad (1)$$

其中: M 、 N 、 Q ——实际荷载引起的内力(分别为弯矩、轴力、剪力);

\underline{M} 、 \underline{N} 、 \underline{Q} ——虚设单位荷载引起的内力;

E 、 G ——材料的弹性模量、剪切模量;

A 、 I ——构件截面的截面积、惯性矩.

也就是说, M 、 N 、 Q 是结构位移状态中的内力,而 \underline{M} 、 \underline{N} 、 \underline{Q} 是该结构虚设力状态中的内力.为了分析问题的方便,暂时忽略轴力与剪力对结构位移的影响(注:这样做的结果不会影响本推导过程的逻辑性),因而公式(1)就简化为^[2]

收稿日期:2001-05-16

作者简介:吴必龙(1971-),男,浙江嵊州人,浙江科技学院土木工程学系讲师,国家一级注册结构工程师,学士,主要从事建筑结构及施工的教学研究.

$$\Delta = \sum \int (\underline{M}M/EI)ds \quad (2)$$

在这里, Δ 表示所要计算的结构上某一点的位移, 而这个虚设的单位荷载正好作用在该点的位置, 其荷载的类型和作用方向与该点要计算的位移类型和方向吻合。

利用公式(2), 举例来比较静定结构和超静定结构位移和内力的计算过程, 见图 1 和图 2(求 B 点的转角 α_B):

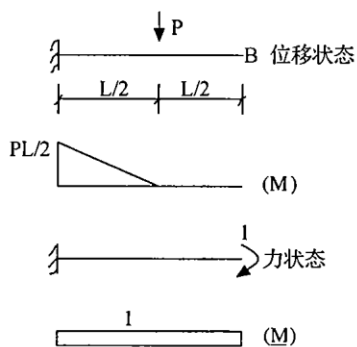


图 1 静定结构计算图
(以悬臂梁为例)

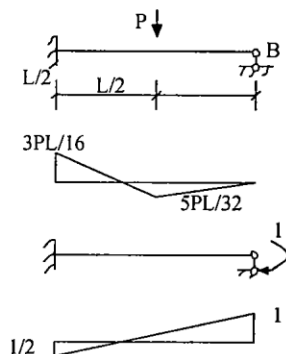


图 2 正超静风结构计算图
(一次超静定为例)

对于静定结构, 用图乘法可得到 $\alpha_B = PL^2/8EI$ (顺时针); 对于超静定结构, 也用图乘法可得到 $\alpha_B = -PL^2/32EI$ (逆时针)。

通过这两个例子可以看出, 用这种方法计算静定结构的位移简单实用, 计算结果可靠; 而用这种方法计算超静定结构位移的计算过程相当繁琐, 不仅要计算两遍超静定结构的内力, 而且积分 (或图乘) 也很复杂, 这对计算的效率和正确性都带来很大的麻烦。因此, 我们要通过这样的思路来改进和简化计算过程: 利用基本体系 (为静定结构) 来求原结构 (超静定结构) 的位移^[3]。

2 分析问题

力法的一般方程为 (结构为 n 次超静定):

$$\Delta_i = \Delta_{ip} + \Delta_{ic} + \Delta_{ir} + \Delta_{it} + \sum \Delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

其中: Δ_i 为原结构中实际所发生的位移;

Δ_{ip} 为外荷载作用在基本体系上所发生的位移;

Δ_{ic} 为基本体系中因支座移动所发生的位移;

Δ_{ir} 为基本体系中因制造误差所发生的位移;

Δ_{it} 为基本体系中因温度变化所发生的位移;

$\sum \Delta_{ij} = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in}$ 为多余力作用在基本结构上所发生的位移;

$\Delta_{ij} = \delta_{ij}X_j$ 为 X_j 作用在基本结构上所发生的位移;

$X_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为多余约束力。

这样, 结构的多余力 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 就可以通过解方程组(3)得到。为了分析问题的方便, 暂时只考虑外荷载作用在超静定结构上的情况, 并且忽略轴力和剪力的影响, 这样, 根据公式(2), 式(3)就简化为

$$\Delta_i = \sum \int (\underline{M}_i M_p / EI) ds + \sum \delta_{ij} X_j \quad (4)$$

其中: \underline{M}_i 为当 $X_i = 1$ 作用在基本结构上而引起的内力(弯矩);

M_p 为当外荷载作用在基本结构上而引起的内力;

$\delta_{ij} = \sum \int (\underline{M}_i \underline{M}_j / EI) ds$ 当 $X_j = 1$ 作用在基本结构上而引起 X_i 处的位移.

一般说来,当超静定结构上只有外荷载作用时,(4)式中的 $\Delta_i = 0$.

运用以上用力法计算超静定结构的一般思路和方程,我们进一步分析超静定结构的位移计算.

设:

M 为外荷载作用在超静定结构(原结构)上而引起的内力;

\underline{M} 为单位荷载作用在原结构某点上而引起的内力(该点的位移是我们所要求的);

M_p 为外荷载作用在基本结构(静定结构)上而引起的内力;

\underline{M}_i 为 $X_i = 1$ 作用在基本结构上而引起的内力;

\underline{M}_k 为单位荷载作用在基本结构该点上而引起的内力;

X_i 为外荷载作用在原结构上时的多余约束力;

X_i' 为与 \underline{M} 对应的多余约束力.

于是有
$$M = M_p + \sum \underline{M}_i X_i; \quad (5)$$

$$\underline{M} = \underline{M}_k + \sum \underline{M}_i X_i' \quad (6)$$

根据公式(2),该点的位移为

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum \int (\underline{M} \underline{M} / EI) ds \\ &= \sum \int [M (\underline{M}_k + \sum \underline{M}_i X_i') / EI] ds \\ &= \sum \int (\underline{M} \underline{M}_k / EI) ds + \sum \int (M \sum \underline{M}_i X_i' / EI) ds \end{aligned} \quad (7)$$

将(5)式代入(7)式中的第二项,经合并,再由(4)式得到:

$$\begin{aligned} \sum \int (M \sum \underline{M}_i X_i' / EI) ds &= \sum X_i' \Delta_{ip} + \sum X_i' (\sum \delta_{ij} X_j) \\ &= \sum X_i' (\Delta_{ip} + \sum \delta_{ij} X_j) \\ &= \sum X_i' \Delta_i \end{aligned}$$

而 $\Delta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 于是,该点的位移

$$\Delta = \sum \int (\underline{M} \underline{M}_k / EI) ds \quad (8)$$

至此,计算超静定结构(原结构)的位移问题就简单多了,只要我们得到了原结构的内力,那么,就可以将单位荷载作用在原结构的任何一个基本体系上,应用虚功原理来求得原结构的位移.

这说明,结构的多余力 X_i' 在位移状态上所做的虚功为零,因为 $\Delta_i = 0$ 成立.

同样,如果考虑到轴力和剪力因素,也可以推导出与公式(1)相似的公式,只要将式中的 \underline{M} 、 \underline{N} 、 Q 换成 \underline{M}_k 、 \underline{N}_k 、 Q_k ,得到以下超静定结构在荷载作用下的位移公式^[4]:

$$\Delta = \sum \int (\underline{M}_k \underline{M} / EI) ds + \sum \int (\underline{N}_k \underline{N} / EA) ds + \sum \int (k Q_k Q / GA) ds \quad (9)$$

而这里, \underline{M}_k 、 \underline{N}_k 、 Q_k 均是原结构的任一基本体系在单位荷载作用下的内力.

3 几点说明

关于这个推导过程,有这样几点需要说明.

首先,若用这样的语言来表述“虚功原理”:存在一个符合结构约束条件的位移状态,有一个使结构平衡的力状态,那么这个平衡力系中的主动力在这个位移状态中相应的位移上所做的虚功,与该结构的力状态中的内力在位移状态中的变形上所积聚的变形能恒等.从以上表述中可以看出虚功原理有两个条件:第一是符合约束条件的位移状态,第二是结构的一个平衡力系,也就是说只要找到一个结构平衡力系,就可以在这个位移条件上应用虚功原理,而最简单的平衡力系就是荷载作用在静定结构(基本体系)上得到,那么公式(9)便很容易得到.

其次,以上推导过程中,如果考虑到支座移动、温度变化等因素,可推导出超静定结构的位移公式为^[5]

$$\Delta = \sum \int (\underline{M}_k M / EI) ds + \sum \int (\underline{N}_k N / EA) ds + \sum \int (k Q_k Q / GA) ds - \sum \underline{R}_k C_k + \sum \int (\underline{M}_k \alpha \quad t / h) ds + \sum \int (\underline{N}_k \alpha t) ds \quad (10)$$

第三,本理论推导的意义在于使我们更容易地从计算静定结构的位移过渡到计算超静定结构的位移,更好地理解“只要多余未知力满足力法方程,则基本体系的受力状态就与原结构完全相同,因而求原结构位移的问题就归结为求基本体系这个静定结构的位移问题”^[6].也使我们掌握“对于超静定结构,只要求出多余力,将多余力也当作荷载同时加在基本结构上,则静定基本结构在已知荷载、温度变化、支座移动以及各多余力共同作用下的位移也就是原超静定结构的位移.这样,计算超静定结构的位移问题通过基本结构即转化成计算静定结构的位移问题,……”^[7]的真正内涵.这使我们坚信“虚功原理”在结构力学中的重要地位,它是解决结构力学问题的基石和重要工具.

参考文献:

- [1] 龙驭球,包世华.结构力学教程(上册)[M].北京:高等教育出版社,1988.144-200.
- [2] 周国瑾,施美丽,张景良.建筑力学[M].上海:同济大学出版社,2000.256-296.
- [3] 杨天祥.结构力学(上册)[M].北京:高等教育出版社,1986.139.

Discussion about deriving the displacement calculation formula of a statically indeterminate structure

WU Bi-long

(Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: The force method is a basic and effective means to calculate statically indeterminate structures. The displacement calculation of a statically indeterminate structure is analyzed in the general way of the Force Method, meanwhile the significance of the principle of virtual work is illustrated.

Key words: force method; statically indeterminate structure; displacement calculation; principle of virtual work