浙江科技学院学报,第13卷第4期,2001年12月
Zhejiang University of Science and Technology
Vol.13 No.4, Dec. 2001

碰撞过程机械能损失公式的推广及简化

王建中
(浙江科技学院 基础部, 浙江 杭州 310012)

摘　要: 对碰撞问题进行了一些教学上的探讨,把文献[2]-[6]关于对心碰撞情形机械能损失的公式推广到两体非对心碰撞的情形,引入折合质量的概念对结果进行简化.应用柯尼希定理对结果进行分析,并对多体完全非弹性碰撞进行了研究.

关键词: 非对心碰撞; 折合质量; 柯尼希定理; 相对运动动能
中图分类号: G633.7　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1008-7680(2001)04-0040-06

碰撞是重要的物理现象.通常碰撞分为弹性碰撞、非弹性碰撞与完全非弹性碰撞三类.这种分类,可以以系统的机械能损失情况为依据:在弹性碰撞过程中,系统的机械能守恒;在非弹性碰撞中,系统的机械能减少;而在完全非弹性碰撞中,系统机械能损失最大.碰撞类型也可以用恢复系数 e 来划分.为简单计,设碰撞物体为两个小球,取两个小球相碰时,两球心的联线为 X 轴,则恢复系数定义为[1]

$$e = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{v_{10x} - v_{20x}} \tag{1}$$

其中下标的含义按惯例理解.则 $e = 1$ 对应于弹性碰撞;$e = 0$ 对应于完全非弹性碰撞;$0 < e < 1$ 对应于非弹性碰撞.如果给出碰撞过程中机械能损失的计算公式,就可以看出,对碰撞的两种分类是完全统一的.

现行的物理教科书中有些教材[1]只给出了恢复系数 e 的定义,而没有给出碰撞过程中机械能损失的计算公式;有些教材[2-5]和工具书[6]虽然给出了两球对心非弹性碰撞过程中机械能损失的计算公式,但给出的公式,形式上非常复杂,因而难以记忆而不能有效直接应用.在遇到有关问题时,还得根据基本原理从头计算.本文把对心碰撞过程中机械能损失的计算公式推广到非对心碰撞时机械能损失的计算公式,引入折合质量和相对速度的概念,把公式简化为熟知的质点动能公式的形式.应用柯尼希定理去分析碰撞过程中的机械能损失,进一步理解计算公式的物理含义,明确损失的机械能属于相对运动的动能.再进一步推广到多体碰撞的情形,得到多体完全非弹性碰撞时,系统损失的机械能的计算公式.对碰撞问题提供一些教学背景.

收稿日期: 2001-01-09

作者简介: 王建中(1956-),男,浙江平湖人,浙江科技学院基础部副教授,主要从事浑沌理论应用研究和物理教学工作.

1　碰撞过程机械能的损失

1.1　对心碰撞的情形

设质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球，碰撞前，其质心运动速度 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$ 的方向在两球心的联线上，碰撞后球心的速度变为 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，也在联线上. 由动量守恒和对心碰撞时恢复系数 e 的定义[1]，得

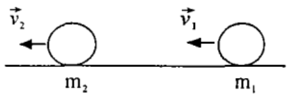

图 1　对心碰撞

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} \tag{2}$$

$$v_2 - v_1 = e(v_{10} - v_{20}) \tag{3}$$

由此可解得

$$v_1 = v_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(v_{10} - v_{20}) \tag{4}$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + e)(v_{10} - v_{20}) \tag{5}$$

上述公式中，$e = 1$ 和 $e = 0$ 分别对应于弹性碰撞和完全非弹性碰撞. 在碰撞中损失的机械能为[2-6]

$$|\Delta E| = T_0 - T \tag{6}$$

其中 T_0 和 T 分别为碰撞前后系统的动能

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

把(4) 式，(5) 式代入动能 T_0、T 的表达式，化简得

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10} - v_{20})^2 \tag{7}$$

由上式可知，当 $e = 1$ 时，$|\Delta E| = 0$，系统没有机械能的损失，是弹性碰撞；当 $0 < e < 1$ 时，$|\Delta E| \neq 0$，有机械能的损失，是非弹性碰撞；当 $e = 0$ 时，机械能的损失最甚，是完全非弹性碰撞. 所以对碰撞类型的两种定义是统一的.

公式(7) 在文献[2—6] 中都已给出. 但是，对心碰撞毕竟是特殊情况. 现在将其推广到一般情况，即非对心碰撞.

1.2　非对心碰撞的情形

设质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球，表面光滑，初始球心速度分别为 $\boldsymbol{v}_{10}$ 和 $\boldsymbol{v}_{20}$，碰撞后变为 v_1 和 v_2，取相碰时，两球心的联线为 X 轴方向，则由动量守恒和恢复系数 e 的定义[1]，有

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v_{10x} + m_1 v_{20x} \tag{8}$$

$$v_{2x} - v_{1x} = e(v_{10x} - v_{20x}) \tag{9}$$

(8) 式、(9) 式与(2) 式、(3) 式相比，只是速度多了一个表示 X 轴方向的下标，所以 v_{1x} 和 v_{2x} 的表达式与(3) 式、(4) 式相似，只需加上下标 x 即得

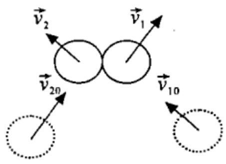

图 2　非对心碰撞

$$v_{1x} = v_{10x} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(v_{10x} - v_{20x}) \tag{10}$$

$$v_{2x} = v_{20x} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + e)(v_{10x} - v_{20x}) \tag{11}$$

因两球表面光滑,相碰时两球相互作用力的方向沿两球接触时的联心线的方向,不难得到

$$\begin{cases} v_{1y} = v_{10y} \\ v_{1z} = v_{10z} \end{cases}, \quad \begin{matrix} v_{2y} = v_{20y} \\ v_{2z} = v_{20z} \end{matrix} \tag{12}$$

再考虑到动能公式

$$T_0 = \frac{1}{2}m_1(v_{10x}^2 + v_{10y}^2 + v_{10z}^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{20x}^2 + v_{20y}^2 + v_{20z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2)$$

不难得到在非对心碰撞过程中损失的机械能为

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{10x} - v \backslash - 20x)^2 \tag{13}$$

其实,习惯上所称的非对心碰撞(或称为斜碰撞),应该称为一般碰撞更合适,因为它包含了对心碰撞在内,即当 $v_{10y} = v_{10z} = v_{20y} = v_{20z} = 0$ 时,就是对心碰撞.

1.3 碰撞过程机械能损失的简化表示

表达式(7)和(13)比较复杂,不易记忆,因而难以有效地直接应用.根据(6)式可知,碰撞过程中机械能的损失就是动能的损失,我们可以把(7)式和(13)式简化为动能公式的形式.

首先,公式中 $m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ 就是两体问题中的折合质量 μ[7]

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

而 $v_{10} - v_{20}$ 是对心碰撞中两球靠近的相对速度,可记为 v_0',同理,$v_{10x} - v_{20x}$ 是非对心碰撞中两球在相碰时联心线方向上靠近的相对速度,可记为 v_{0x}',于是(5)式和(10)式可简化为

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}(1 - e^2)\mu {v_0'}^2 \tag{14}$$

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}(1 - e^2)\mu {v_{0x}'}^2$$

(15) \ = 对于完全非弹性碰撞,则(14)式为

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}\mu {v_0'}^2 \tag{16}$$

此表达式与质点动能的表达式完全类同,可以使人长久不忘.而非弹性碰撞和完全非弹性碰撞相比,前者损失能量较少,损失的能量应该是(16)式乘上一个小于1的系数:$1 - e^2$,这就是(14)式.也非常容易记忆.

(15)式和(16)式的物理含义,可以从柯尼希定理理解.

2 柯尼希定理在碰撞中的应用

2.1 柯尼希定理

质点系的动能定义为质点系中所有质点动能的和

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

柯尼希定理告诉我们,质点系的动能可以分为两部分,该定理的数学表述[7]为

$$T = \frac{1}{2}mv_c + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i'^2 \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{v}_c$ 是质点系质心的速度，m 是质点系所有质点质量之和. 可称其为质点系的质量. 因而第一项可称之为质心的动能；而 $\boldsymbol{v}_i'$ 是第 i 个质点 m_i 相对于质心的运动速度. 故第二项是质点系所有质点相对于质心运动时的动能. 所以柯尼希定理可以理解为质点系的动能等于质心的动能与质点系相对于质心的相对运动动能之和.

2.2 柯尼希定理在两体问题中的表达式

首先证明，将柯尼希定理应用于两个质点组成的体系时，可以把系统的总能量写为

$$T = \frac{1}{2}mv_c + \frac{1}{2}\mu v'^2 \tag{18}$$

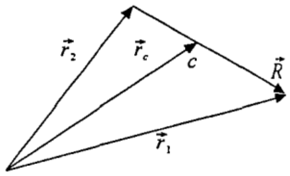

图3 两体问题的各个位矢

如图，设质点 m_1 和 m_2 的坐标为 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，质心位于 m_1 和 m_2 的联线上，其坐标为 $\boldsymbol{r}_c$

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{19}$$

m_1 相对于 m_2 的位矢 $\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \tag{20}$$

m_1 和 m_2 相对于质心 c 的位矢 $\boldsymbol{r}_1'$ 和 $\boldsymbol{r}_2'$，则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1' - \boldsymbol{r}_2' \end{cases} \tag{21}$$

由(19)式、(20)式和(21)式可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1' = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{r}_2' = -\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{R} \end{cases} \tag{22}$$

根据柯尼希定理

$$T = \frac{1}{2}mv_c + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i'^2$$

其中第二项

$$T' = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1' \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_1' + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2' \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2')$$

把(22)式对时间求导后代入上式，得

$$T' = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m + m_{21}}\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_1' - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2' = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{R}} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_1' - \dot{\boldsymbol{r}}_2')$$

$$= \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2}\mu v'^2$$

于是得到(18)式.

2.3 从柯尼希定理看碰撞中损失的机械能

2.3.1 对心完全非弹性碰撞情形

根据(18)式，在碰撞前系统的相对运动动能 $T_0' = \frac{1}{2}\mu v_0'^2$，而由(16)式，$|\Delta E| = \frac{1}{2}\mu v_0'^2$，所以 $T'_0 = |\Delta E|$，即在对心完全非弹性碰撞中损失的机械能就等于相对运动动能. 这是容易理解的. 在

碰撞中，由于系统动量守恒，质心速度不变，因而质心动能$\frac{1}{2}mv^2$不变. 而相对于质心运动的相对动能在完全非弹性碰撞后则全部损失了.

2.3.2 对心非弹性碰撞情形

同理，在对心非弹性碰撞中，系统的质心动能保持不变，损失的只能是相对运动动能的一部分. 碰撞前后的相对运动动能分别为

$$T'_0 = \frac{1}{2}\mu v_0'^2 \quad 和 \quad T' = \frac{1}{2}\mu v'^2$$

其中 v' 是两球碰撞后分离的相对速度，根据(3)式

$$v' = v_1 - v_2 = -e(v_{10} - v_{20}) = -ev_0'$$

故

$$|\Delta E| = T'_0 - T' = \frac{1}{2}(1 - e^2)\mu v_0'^2$$

此即(14)式. 在对心非弹性碰撞情形下，用柯尼希定理求系统的机械能损失在文献[8]中有所论述. 现在，把柯尼希定理用于非对心碰撞的情形.

2.3.3 非对心完全非弹性碰撞情形

在(15)式中，取 $e = 0$，得 $|\Delta E| = \frac{1}{2}\mu v_{0x}'^2$，因为 $v_{0x}' = v_{10x} - v_{20x}$，再考虑到(9)式，容易证明，$v_{0x}'^2 = v_0'^2$，其中，$v_0'^2 = (v_{10x} - v_{20x})^2 + (v_{10y} - v_{20y})^2 + (v_{10z} - v_{20z})^2$，所以 $T'_0 = |\Delta E|$，故在非对心完全非弹性碰撞中，系统的质心动能不变，相对动能全部损失.

2.3.4 非对心非弹性碰撞的情形

在非对心碰撞中，由于系统的动量守恒，系统的质心仍保持不变，碰撞过程中所损失的能量也只能是相对运动的一部分. 因为

$$|\Delta E| = T'_0 - T' = \frac{1}{2}\mu v_0'^2 - \frac{1}{2}\mu v'^2$$

而

$$v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$$
$$v_0'^2 = v_{0x}'^2 + v_{0y}'^2 + v_{0z}'^2$$

下标 x 的方向是两球相碰时的联心线方向. 由(9)式、(10)式、(11)式、(12)式可得

$$\begin{cases} v_x' = v_{1x} - v_{2x} = -e(v_{10x} - v_{20x}) = -ev_{0x}' \\ v_y' = v_{1y} - v_{2y} = v_{0y}' \\ v_z' = v_{1z} - v_{2z} = v_{0z}' \end{cases}$$

因而

$$v_0'^2 - v'^2 = v_{0x}'^2 - v_x'^2 = (1 - e^2)\, v_{0x}'^2$$

所以

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}(1 - e^2)\mu v_{0x}'^2$$

此即(15)式.

2.3.5 多体系统完全非弹性碰撞的情形

把柯尼希定理应用于二体碰撞所得的结论推广到多体碰撞，可以知道，碰撞过程系统的质心动能不变. 在完全非弹性碰撞的情形下，相对运动动能完全损失，所以碰撞中系统损失的机械能为

$$|\Delta E| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_c - \boldsymbol{v}_i)^2 \tag{23}$$

式中，质心速度

$$\boldsymbol{v}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i / \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i$$

$\boldsymbol{v}_i$ 是第 i 个物体在碰撞以前的速度.

3 结束语

(1) 可以把对心碰撞过程中机械能损失的计算公式推广到非对心碰撞过程，计算公式(13) 式是更一般的表达式，它包含了对心碰撞情形在内. 恢复系数 e 的不同取值对应于弹性、非弹性或完全非弹性碰撞.

(2) 引入折合质量 μ 和相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 后，碰撞过程机械能损失的计算公式形式简单，易于记忆，便于直接使用.

(3) 把柯尼希定理应用于二体碰撞，可以知道，不管是对心碰撞还是非对心碰撞，还是完全非弹性碰撞、非弹性碰撞，碰撞中损失的能量都是相对运动动能，并可由此推出机械能损失的计算公式.

(4) 推广到多体完全非弹性碰撞，可得机械能损失的计算公式(23)式.

参考文献：

[1] 漆安慎，杜婵英. 力学基础[M]. 北京：高等教育出版社，1982. 230 - 232.
[2] 赵景员，王淑贤. 力学[M]. 北京：高等教育出版社，1979. 271.
[3] 程守洙，江之永. 普通物理学(第一册)[M]. 北京：高等教育出版社，1978. 163.
[4] 吴泽华，陈治中，黄正东. 大学物理(上册)[M]. 杭州：浙江大学出版社，1997. 98 - 101.
[5] 罗圆圆. 大学物理(上册)[M]. 南昌：江西高校出版社，2000. 164 - 167.
[6] 阮图南，佘守宪，梁昆淼，等. 物理学辞典[M]. 合肥：安徽教育出版社，1988. 107.
[7] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 131.
[8] 梁昆淼. 力学(上册)[M]. 北京：高等教育出版社，1995. 265.

Extension and simplification of the formula of mechanical energy loss in the collision

WANG Jian-zhong
(Department of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: This paper discusses the probloms of collision, extends the result in ref [2] - [6] which show the formula of the mechanical energy loss to the situation of oblique collision, simplifies the result by using the reduced mass, analyses the result with König's theorem and studies the result of the perfectly inelastic collision of many-body system.

Key words oblique collision; reduced mass; König's theorem; kinetic energy of relative motion