浙江科技学院学报,第14卷第2期,2002年6月
Zhejiang University of Science and Technology
Vol.14 No.2, June 2002

碟盘扫瞄线总长度的计算

王建中
(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘　要: 指出了文献[2]计算扫描线总长度的不严格之处,讨论了近似公式可以应用的条件和利用物理概念求解的思路.

关键词: 螺旋线; 曲线长度; 极坐标
中图分类号: O411.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1008-7680(2002)02-0001-04

马文蔚改编的《物理学》,取材适宜,传统与近代兼顾,在注重基础理论的同时,适当地结合实际应用,因此深受欢迎而被广泛采用.其第四版已被教育部选为"面向21世纪课程教材",在该书中新增和调整了不少习题,力图使传统教材更具现代气息.如计算机的信息存取广泛使用光盘、磁盘,而在该书第四版中的运动学中新增了"碟盘扫描线总长度的计算"一题[1],就是理论联系实际的新颖习题.

但是,高等教育出版社出版的与此书配套的《物理学 第四版 习题分析与解答》一书,对该题的解答[2]欠妥.鉴于此书公开发行,影响面大,因而有作说明的必要.

1　原题及解答

1.1　原题

碟盘是一张表面覆盖一层信息记录物质的塑性圆片.若碟盘可读部分的内外半径分别为2.50 cm和5.80 cm.在回放时,碟盘被以恒定的线速度由内向外沿螺旋线(阿基米德螺线)进行扫描.(1) 若开始时读写碟盘的角速度为50.0 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$,则读完时的角速度为多少? (2) 若螺旋线的间距为1.60 μm,求扫描线的总长度和回放时间.

1.2　原解答

(1) 由于线速度恒定,则由 $v = \omega r$,可得 $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$,故碟盘读完时的角速度为

$$\omega_2 = \omega_1 r_2 / r_2 = 21.6\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

(2) 在可读范围内,螺旋线转过极角 $\theta = 2\pi(r_2 - r_1)/d$,故扫描线的总长度为

$$s = \int r \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi(r_2 - r_1)/d} \left(r_1 + \frac{d}{2\pi} \right) \mathrm{d}\theta = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{d} = 5.38 \times 10^3\ \mathrm{m}$$

收稿日期: 2001-12-27

作者简介: 王建中(1956-),男,浙江平湖人,浙江科技学院基础部副教授,主要从事浑沌理论应用研究和物理教学工作.

碟盘的回放时间为

$$t = s/v = 4.10 \times 10^3\ \mathrm{s} = 1.15\ \mathrm{h}$$

2 问题的分析和解决

2.1 原解答的疏忽

在计算扫描线的总长度时,原解答中直接应用下面公式

$$s = \int r\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

是不严格的.计算螺旋线的长度宜用极坐标,曲线长度的计算公式为

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

只有当$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \ll r$时,才可以近似的认为 $s = \int r\mathrm{d}\theta$.实际上,横向直角边 $r\mathrm{d}\theta$、径向直角边 $\mathrm{d}r$ 和线元 $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2}$ 形成一个直角三角形,只有当径向直角边 $\mathrm{d}r$ 远小于横向直角边 $r\mathrm{d}\theta$ 时,才能说斜边 $\mathrm{d}s$ 约等于横向直角边.即 $\mathrm{d}s \approx r\mathrm{d}\theta$.在没有作充分说明的情况,直接使用近似公式是不妥的.这相当于说斜边等于直角边.对于求助于此书的读者,可能起误导作用.

2.2 问题的解

阿基米德螺线的参数方程为 $r = r_o + a\theta$,其中 r 为极径,r_o 为初始极径,θ 为极角,而 a 为常数.记螺旋线的间距为 d,则 $a = d/2\pi$.应用(2)式,显然 $\theta_1 = 0$,记 $\theta_m = \theta_2$,于是,扫描线的总长度为

$$s = \int_0^{\theta_m}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

根据题意,$r_o = 2.50\ \mathrm{cm}$,$r_m = 5.80\ \mathrm{cm}$,而 $r_m = r_o + a\theta_m = r_o + \frac{d}{2\pi}\theta$,

所以

$$\theta_m = 2\pi(r_m - r_o)/d$$

而

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = a = \frac{d}{2\pi} = \frac{1.60 \times 10^{-6}}{2\pi} = 2.55 \times 10^{-7}\ \mathrm{m/rad}$$

此值远远小于 r 的值($2.50 \times 10^{-2}\ \mathrm{m} \sim 5.80 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$),所以(3)式中根号内的第一项可以略去不计,得螺旋线长度 s 的近似计算公式

$$s = \int_0^{\theta_m} r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi(r_m - r_o)/d}\left(r_o + \frac{d}{2\pi}\right)\mathrm{d}\theta$$

积分,并代入数据,计算得 $s = 5.38 \times 10^3\ \mathrm{m}$

2.3 应用物理概念求解

这一道习题,若按上面的方法求解,不禁使人心存疑惑:这似乎更象一道数学题.既然此题放在运动学中,最好是使用运动学的公式来求解.

设质点从 r_o 处沿着阿基米德螺线一直走到 r_m 处,则质点走过的路径就是螺旋线的总长度,而路径

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v\mathrm{d}t \tag{4}$$

此处的 v 是质点运动速度的大小,在极坐标下表示为

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{5}$$

把(5)式代入(4)式，即可得

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=\int_{r_o,0}^{r_m,\theta_m}\sqrt{\mathrm{d}r^2+(r\mathrm{d}\theta)^2}$$

$$=\int_0^{\theta_m}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2}\mathrm{d}\theta$$

这就是(3)式，计算结果当然相同，只是考虑问题的出发点是运动学公式.

3 几点讨论

3.1 误差估计

上面我们指出，在计算曲线长度时应该使用一般的公式，只有在一定的条件下才可以作近似处理. 那么上题近似计算引起的误差有多大呢？当然可以把精确计算和近似计算的结果进行比较而知. 实际上我们是基于这样考虑：如前所述，近似的实质是对微小直角三角形用横向直角边代替斜边，而略去了径向直角边. 所以近似所得的长度比实际长度小，而总误差小于径向直角边之和，即 $\Delta s < r_m - r_o = 2.3\times10^{-2}\,\mathrm{m}$，考虑到 $s = 5.38\times10^3\,\mathrm{m}$，误差 Δs 确实微乎其微. 这是因为在本题中，螺旋线几乎和半径垂直，螺旋线和圆相近.

但是，仍要强调，$s=\int r\mathrm{d}\theta$ 是近似公式，一般情况下应该使用(2)式计算，但是用(2)式计算的表达式比较复杂. 设螺旋线方程为 $r = r_o + a\theta$，设 θ 的变化范围为 $0\sim\theta_m$，由(1)式计算得螺旋线长度为

$$s_1=\int_{\theta_1}^{\theta_2}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\theta_m}(r_o+a\theta)\mathrm{d}\theta=\left[r_o\theta+\frac{1}{2}a\theta^2\right]\Big|_0^{\theta_m}=\theta_m\left(r_o+\frac{a}{2}\theta_m\right)\tag{6}$$

而由(2)式计算得螺旋线长度为

$$\begin{aligned}s_2&=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\theta_m}\sqrt{a^2+(r_o+a\theta)^2}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{\theta_m}\sqrt{1+\left(\frac{r_o}{a}+\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta\\&=a\left[\frac{(r_o/a)+\theta}{2}\sqrt{1+\left(\frac{r_o}{a}+\theta\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_o}{a}+\theta+\sqrt{1+\left(\frac{r_o}{a}+\theta\right)^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\theta_m}\\&=a\left\{\left[\frac{r_o+a\theta_m}{2a}\sqrt{1+\left(\frac{r_o}{a}+\theta_m\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_o+a\theta_m}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{r_o}{a}+\theta_m\right)^2}\right)\right]\right.\\&\quad\left.-\left[\frac{r_o}{2a}\sqrt{1+\frac{r_o^2}{a^2}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_o}{a}+\sqrt{1+\frac{r_o^2}{a^2}}\right)\right]\right\}\end{aligned}\tag{7}$$

(7)式比(6)式复杂得多. 所以，当螺距 d 比较小，即当 $a = d/2\pi$ 远小于 r 时，用(1)式计算比较简便，但应该把条件交待清楚. 很显然，误差 s_2 和 s_1 之差随着 d 的增加而增加. 设 $r_o = 1, \theta_m = 2\pi$，具体计算结果见表 1.

表 1　s_1、s_2 及误差随螺距 d 的变化情况

d	2	4	6	8	10	12	14	16
s_1	12.56	18.84	25.12	31.40	37.68	43.96	50.24	56.52
s_2	12.73	19.34	26.01	32.70	39.42	46.15	52.89	59.63
$s_2 - s_1$	0.1732	0.4985	0.8854	1.305	1.742	2.192	2.650	3.112

虽然误差 $\Delta s = s_2 - s_1$ 随着螺距 d 的增加而增加，但 θ 每变化 2π 产生的误差小于螺距 d.

3.2 提倡独立思考

现在由于各种原因,习题解答之类的书籍出版较多.这类书籍对自学的学生若使用得当,确实有帮助.而对于在校学生,若有疑难,找老师探讨是更好的选择.若做作业时,一有问题,就翻看习题解答,则不利于独立思考,对能力的培养没有益处.所以习题解答的公开出版发行也有一定的负面作用.

习题解答难免有差错或欠妥之处,学生应该坚持独立思考,免受"负"作用.例如,文献[2]对3-12题的解所作的解释也是错误的,具体说明可参考文献[3].所以,笔者不赞成在校学生使用与教材配套的习题解答.

参考文献:

[1] 马文蔚.物理学(上册)(第四版)[M].北京:高等教育出版社,1999.
[2] 马文蔚.物理学第四版习题分析与解答[M].北京:高等教育出版社,2000.
[3] 王建中.一道CUSPEA试题解的诠释[J].杭州应用工程技术学院学报,2001,13(2):46-49.

Calculation of total length of scan line on a disc

WANG Jian-zhong
(Dept. of Basic Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: The improper way which calculate the length of scan line in reference[2] is pointed out. The condition of playing approximate formula and the solution by using of physical concept are discussed.

Key words: helix; length of curve; polar coordinate