浙江科技学院学报,第 14 卷第 3 期,2002 年 9 月
Zhejiang University of Science and Technology
Vol.14 No.3, Sep. 2002

光杠杆放大法的误差分析

冯元新
(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘　要：阐述与分析了在用光杠杆放大法测量杨氏弹性模量的实验中,光杆镜镜面与望远镜光轴所成的角度,对测量微小长度所产生的误差.

关键词：杨氏弹性模量；光杠杆放大法；微小长度；误差
中图分类号：O4-34　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2002)03-0001-03

普通物理实验中,金属丝杨氏弹性模量的测定实验是一个经典的实验,说它经典的主要是因为这个实验中设计出的测量方法构思精巧,而且测量精度高.相对其他普通物理实验来说,这个实验很有代表性,对于学生来说,也很有启发性.因此,高校的普通物理实验里,这个实验是必做的.而此实验的精华就体现在用光杠杆放大法来测量微小长度的变化.

1　实验原理介绍

当截面为 S,长度为 L_0 的棒状(或线状)材料,受到拉力 F 拉伸时,伸长了 ΔL,其单位面积截面所受到的拉力 F/S 称为胁强,而单位长度的伸长量 $\Delta L/L_0$ 称为胁变.根据胡克定律,在弹性形变范围内,棒状(或线状)固体胁变与它所受的胁强成正比:

$$\frac{F}{S} = Y \cdot \frac{\Delta L}{L_0} \tag{1}$$

其比例系数 Y 取决于固体材料的性质,称为杨氏弹性模量.由(1)式得到:

$$Y = \frac{F \cdot L_0}{S \cdot \Delta L} \tag{2}$$

从上式的杨氏模量的定义式出发,可以看出,要测量杨氏弹性模量,就要先测量出 F、L_0、S、ΔL 这四个未知量,其中拉力 F、被测量材料的原长 L_0 与截面积 S 均可用

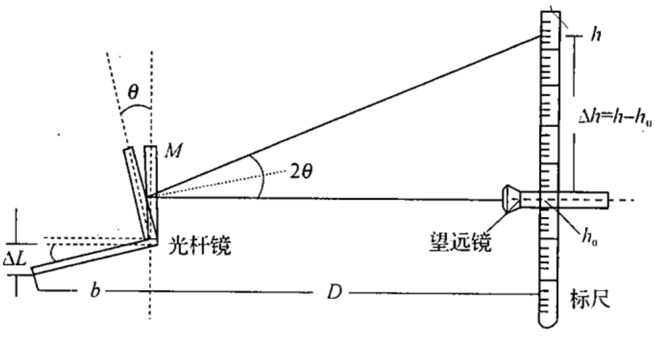

图 1　光杠杆放大原理图

收稿日期：2002-04-28
作者简介：冯元新(1976-),男,浙江兰溪人,浙江科技学院基础部助理工程师,主要从事大学物理实验教学.

常规的长度测量方法简单地求得,唯有 ΔL 这一微小的伸长量是通过光杠杆放大法测量的.光杠杆放大法的原理图如图 1 所示.

由图 1 可见,当金属丝未伸长时,望远镜所处的位置为 h_0,但由于镜面 M 与望远镜垂直,所以通过光杆镜镜面从标尺上读出的读数也是 h_0。当金属丝一端受到拉力 F 时,其伸长量为 ΔL,镜面 M 转过 θ 角,此时望远镜通过光杆镜镜面,在标尺上读出的读数为 h,因此有:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\Delta L}{b} \tag{3}$$

和

$$\mathrm{tg}2\theta = \frac{h - h_0}{D} = \frac{\Delta h}{D} \tag{4}$$

由于 $\Delta L \ll b, \Delta h \ll D$,因此,$\mathrm{tg}\theta \approx \theta, \mathrm{tg}2\theta \approx 2\theta$,从而由(3)式与(4)式得:

$$\frac{2\Delta L}{b} = \frac{\Delta h}{D}; \Delta L = \frac{b \cdot \Delta h}{2D} \tag{5}$$

由于 $D \gg b$,所以 $\Delta h \gg \Delta L$,从而获得微小量的线性放大,提高了 ΔL 的测量精度,此法就是所谓的光杠杆放大法.把(5)式代入(2)式,并由 $S = \frac{1}{4}\pi d^2$ 得:

$$Y = \frac{8FL_0D}{\pi d^2 \cdot b \cdot \Delta h} \tag{6}$$

2 提出与分析问题

按理论上来说,学生在测量微小长度的时候,应按图 1 所示,使光杆镜镜面 M 与望远镜的光轴垂直.但在实际做实验时,很难做到望远镜光轴与镜面 M 垂直,往往会使望远镜与镜面 M 成一角度,我们可设这一角度的大小为 α.这时通过望远镜从光杆镜镜面 M 中看到的读数并不是望远镜所在位置的读数.如图 2 所示.

光杆镜镜面 M 因与望远镜的光轴成 α 角度,这个 α 角度的大小对测量结果误差的大小有何关系?并且对测量结果的误差影响如何?下面我们从图 1 与图 2 来分析这个问题.

由图 1 可知,当金属丝一端受到拉力 F 时,其伸长量为 ΔL,镜面 M 转过 θ 角时,这时在望远镜这端标尺读数的变化量为 Δh,可计算出:

$$\Delta h = D\mathrm{tg}2\theta \tag{7}$$

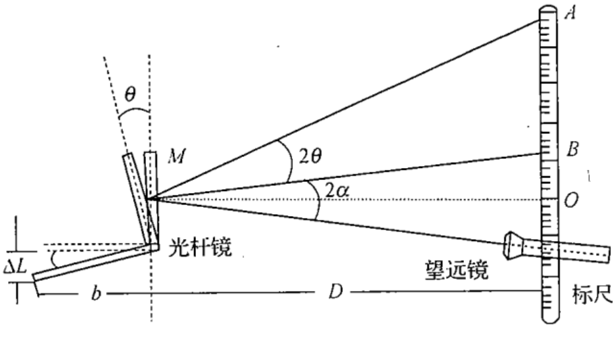

图 2 误差分析原理图

由图 2 知道,当金属丝一端同样受到拉力 F 时,其伸长量为 ΔL,镜面 M 转过 θ 角时,这时在望远镜这端标尺读数的变化量为 AB 长度.$AB = AO - BO$

$$AO = D\mathrm{tg}(2\theta + \alpha); BO = D\mathrm{tg}\alpha$$

$$AB = AO - BO = D\mathrm{tg}(2\theta + \alpha) - D\mathrm{tg}\alpha \tag{8}$$

比较(6)式与(7)式,可以看出 Δh 与 AB 并不相等.

设 $\Delta\delta = AB - \Delta h$,可以算出 $\Delta\delta$ 的值:

$$\Delta\delta = AB - \Delta h = D\mathrm{tg}(2\theta + \alpha) - D\mathrm{tg}\alpha - D\mathrm{tg}2\theta$$

$$= D\frac{\mathrm{tg}2\theta + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}2\theta \cdot \mathrm{tg}\alpha} - D\mathrm{tg}\alpha - D\mathrm{tg}2\theta$$

$$= D\frac{(\mathrm{tg}2\theta + \mathrm{tg}\alpha)\cdot \mathrm{tg}2\theta \cdot \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}2\theta \cdot \mathrm{tg}\alpha} \tag{9}$$

由(9)式就可以计算当镜面 M 与望远镜光轴成 α 角度时，所引起的相对误差的大小，其相对误差大小的计算如下式：

$$E = \frac{\Delta\delta}{\Delta h} \times 100\%$$

把(7)式与(9)式代入上式得：

$$E = \frac{(\mathrm{tg}2\theta + \mathrm{tg}\alpha)\cdot \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}2\theta \cdot \mathrm{tg}\alpha} \times 100\% \tag{10}$$

这就是由镜面 M 与望远镜光轴成 α 角度时，给测量结果所带来相对误差的计算公式. 这是一个比较抽象的公式，现在用实验数据来计算一下相对误差的大小.

在实验室若按图1做杨氏弹性模量这个实验时，镜面 M 与标尺的间距 D 的长度一般为2 m左右，所挂砝码的重量为1 kgf，也即拉力 F 为9.8 N. 当挂上一个砝码时，从望远镜中看到标尺读数的变化量 Δh 一般大约是5 mm左右. 为了下面的运算简便，我们假设：$D = 2$ m，$\Delta h = 5$ mm，则 $\mathrm{tg}2\theta = \Delta h / D = 0.0025$，因此相对误差 E 的大小还跟角度 α 的大小有关. 如表1所示.

表1　相对误差 E 的大小与 α 角度大小的关系

α(°)	$\mathrm{tg}\alpha$	$OB = D\mathrm{tg}\alpha$(mm)	E(%)
0.5	0.00873	17.46	0.010
1	0.01745	34.9	0.034
3	0.05241	104.82	0.288
5	0.08749	174.98	0.788
8	0.14054	281.08	2.011
10	0.17632	352.64	3.153

$$\left(D = 2m, \mathrm{tg}2\theta = 0.0025, E = \frac{(\mathrm{tg}2\theta + \mathrm{tg}\alpha)\cdot \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}2\theta \cdot \mathrm{tg}\alpha} \times 100\%\right)$$

由表1看出：

(1) 当 $3° \leqslant \alpha \leqslant 5°$ 时，其相对误差不足1%，但如图2上的 OB 间距已超过10 cm，对于 Δh（约等于5 mm）来说，这是很大的一个数字，即使对于长度只有四五十厘米的标尺来说，也是很大的一个数字. 这时我们可以调节望远镜下面的倾斜微调螺钉，使 $\alpha \leqslant 3°$. (2) 当 $\alpha \geqslant 5°$ 时，虽然其相对误差超过1%，但这时 OB 间距太大，这在实际做实验中出现的可能性太小，即使出现，由于望远镜所在位置与 B 点之间的间距占了标尺的绝大部分长度，当我们加多个砝码时，这时通过望远镜测到的读数将会超过标尺的长度，使实验无法继续. (3) 在做实验中，通过调节望远镜下面的倾斜微调螺钉，使 $\alpha \leqslant 3°$，由表1可看出这时相对误差的大小不超过0.3%. 符合此实验的精度要求.

3　结　论

综上所述，在实验中光杆镜镜面 M 与望远镜光轴之间形成一角度 α 是很难避免的，这一角度对微小长度的测量结果有一定影响，但只要在做实验时，把 α 角度的大小控制在一定范围内，这样的话，对测量微小长度的误差并不大. 从表1的数据可以看出用光杠杆放大法来测量微小长度的精度相当高，并且性能稳定，受外界因素影响小.

（下转第7页）

（上接第 3 页）

参考文献：

[1]　潘人培，陈守川．大学物理实验教程[M]．杭州：浙江大学出版社，1996．116－122．

Error analysis in the optical lever magnify

FENG Yuan-xin

(Department of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, HangZhou 310012)

Abstract: The present paper expounds and analyzes the error of measuring minute length which caused by the angle between the surface of optical lever's mirror and the axis of telescope in the experiment of measuring Young's modulus elasticity with optical lever magnify.

Key words: Young's modulus elasticity; optical lever magnify; minute length; error