浙江科技学院学报,第 14 卷第 4 期,2002 年 12 月
Zhejiang University of Science and Technology
Vol.14 No.4, Dec. 2002

关于四元数矩阵方程 $AXA^* = B$ 的最小二乘解

薛有才
(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘　要: 定义了四元数矩阵方程的范数,导出了四元数矩阵方程 $AXA^* = B$ 的最小二乘解及其在约束条件 $DX = E$ 下的最小二乘解,以及其具有极小范数的最小二乘解.

关键词: 四元数体; 矩阵方程; 最小二乘解; 极小范数解
中图分类号: O151.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2002)04-0001-04

实四元数矩阵方程

$$AXA^* = B \tag{1}$$

是一个很重要的矩阵方程,在文献[1]中讨论了它的一些解,在文献[2]中给出了实四元数矩阵方程

$$AX = B \tag{2}$$

及其在约束条件

$$DX = E \tag{3}$$

下的最小二乘解.本文给出了矩阵方程(1)及其在约束条件式(3)下的最小二乘解,以及其具有极小范数的最小二乘解.

本文约定,Q 和 $Q^{m\times n}$ 分别表示一个实四元数体和 Q 上全体 $m\times n$ 矩阵,$\mathrm{Re}(b)$ 和 $\bar{b}$ 分别表示实四元数 b 的实部和 b 的共轭四元数,A^* 表示四元数矩阵方程 A 的共轭转置矩阵,$\mathrm{tr}A$ 表示矩阵 A 的迹,$A^{+[3]}$ 表示实四元数矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆[2].

定义 1[2]　设 V 是一个广义酉空间,$\alpha\in V$,称 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的范数,记作 $\|\alpha\|$.

容易证明

引理 1　设 V 是一个广义酉空间,α、$\beta\in V$,则

$$\|\alpha+\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha,\beta)$$

定义 2　设 $A\in Q^{m\times n}$,称 $[\mathrm{tr}(A^*A)]^{\frac{1}{2}}$ 为矩阵 A 的范数,记作 $\|A\|$.

对于四元数矩阵方程(1),其中 $A\in Q^{m\times n}$,$B\in Q^{n\times m}$.

定义 3　对于四元数矩阵方程 (1),若有 $X_0\in Q^{n\times n}$ 使得

$$\|AX_0A^* - B\|^2 = \min_{X\in Q^{n\times n}} \|AXA^* - B\|^2 \tag{4}$$

则称 X_0 为式(1)的一个最小二乘解.

收稿日期: 2002-10-19

作者简介: 薛有才(1956-),男,山西临猗人,浙江科技学院基础部教授,主要从事计算数学的教学与研究工作.

定义 4 称矩阵方程

$$A^* AXA^* A = A^* BA \tag{5}$$

为式(1)的正规方程.

引理 2 矩阵方程(1)有解的充要条件为

$$AA^+ B(AA^*)^+ (AA^*) = B \tag{6}$$

当式(1)有解时,其一般解为

$$X = A^+ B(AA^*)^+ A + Y - A^+ AY(A^* A)(A^* A)^+ \tag{7}$$

这里,$Y \in Q^{n\times n}$是任意的.

引理 3[4] 设 $A \in Q^{m\times n}$,则

(i) $A^+ = (A^* A)^+ A^* = A^*(AA^*)^+$

(ii) $A^* = A^* A(A^* A)^+ A^* = A^*(AA^*)^+(AA^*)$

引理 4[5] 设 $A \in Q^{m\times n}, B \in Q^{n\times m}$,则 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}AB) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}BA)$

引理 5 设 $L \in Q^{m\times n}, Q_L = I - L^+ L, G \in Q^{m\times n}, N \in Q^{n\times n}$,则

(i) $Q_L^* = Q_L = Q_L^2$

(ii) $Q_L(L^+ G) = 0$

(iii) $Q_L(NQ_L)^+ = (NQ_L)^+$

由引理 2 和引理 3 易得

引理 6 矩阵方程(1)的正规方程(5)一定有解.

引理 7[2] 矩阵方程(2)有解的充要条件为 $AA^+ b = b$,当式(2)有解时,其一般解为

$$X = A^+ b + (I - A^+ A)Y$$

其中 $Y \in Q^{n\times r}$ 是任意的.

定理 1 X_0是矩阵方程(1)的一个最小二乘解的充要条件为 X_0 是式(1)的正规方程(5)的解,因而式(1)一定有最小二乘解.

证明 由引理 1 和引理 4,对任意的 $X, X_1 \in Q^{n\times n}$,有

$$\begin{aligned}\| AXA^* - B \|^2 &= \| A(X_1 + X - X_1)A^* - B \|^2 \\ &= \| AX_1A^* - B \|^2 + \| A(X - X_1)A^* \|^2 + \\ &\quad 2\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(X - X_1)^* A^*(AX_1A^* - B)A]\end{aligned} \tag{8}$$

设 X_0是式(1)的正规方程(5)的解,即有

$$A^* AX_0A^* A = A^* BA \tag{9}$$

在式(8)中令 $X_1 = X_0$,则由式(9)

$$\| AXA^* - B \|^2 = \| AX_0A^* - B \|^2 + \| A(X - X_0)A^* \|^2 \geqslant \| AX_0A^* - B \|^2$$

由 $X \in Q^{n\times n}$ 的任意性知

$$\min_X \| AXA^* - B \|^2 \geqslant \| AX_0A^* - B \|^2$$

所以

$$\| AX_0A^* - B \|^2 = \min_X \| AXA^* - B \|^2 \tag{10}$$

即 X_0是式(1)的一个最小二乘解.

反之,设 X_0是式(1)的一个最小二乘解,即式(10)成立.设 Y_0是式(5)的一个解,即 $A^* AY_0A^* A = A^* BA$,类似于式(10)的证明有:

$$\| AY_0A^* - B \|^2 = \min_X \| AXA^* - B \|^2 \tag{11}$$

由式(10)和式(11),

$$\| AX_0A^* - B \|^2 = \| AY_0A^* - B \|^2 \tag{12}$$

在式(8)中,令 $X = X_0, X_1 = Y_0$.那么由式(9),

$$\| AX_0A^* - B \|^2 = \| AY_0A^* - B \|^2 + \| A(X_0 - Y_0)A^* \|^2$$

再由式(12), $\| A(X_0 - Y_0)A^* \|^2 = 0$. 故, $AX_0A^* = AY_0A^*$. 于是 $A^*AX_0A^*A = A^*AY_0A^*A = A^*BA$. 这就是说 X_0 是式(1)的正规方程(5)的一个解.由引理6,式(1)有最小二乘解.

定理2　矩阵方程(1)的最小二乘解集为

$$M = \{A^+B(AA^*)^+A + Y - A^+AY(A^*A)(A^*A)^+ \mid Y \in Q^{n\times n}\} \tag{13}$$

证明　由定理1,只需证明式(5)的解集为式(13).因式(5)有解,由引理2,式(5)的解集为

$$\{(A^*A)^+A^*BA(A^*A)^+ + Y - (A^*A)^+(A^*A)Y(A^*A)^+ \mid Y \in Q^{n\times n}\} \tag{14}$$

由引理3,式(14)即式(13).

定义5　令 $X_0 \in M$, 且 $\| X_0 \| = \min\limits_{X\in M} \| X \|$,则称 X_0 是矩阵方程(1)的一个具有极小范数的最小二乘解.

定理3　$A^+B(AA^*)^+A$ 是矩阵方程(1)的一个具有极小范数的二乘解.

证明　由定理2, $A^+B(AA^*)^+A \in M$. 设 X_1 是式(1)的任一个最小二乘解,则 $X_1 = A^+B(AA^*)^+A + Y_1 - A^+AY_1(A^*A)(A^*A)^+, Y_1 \in Q^{n\times n}$,于是

$$\begin{aligned}\| X_1 \|^2 = {} & \| A^+B(AA^*)^+A \|^2 + \| Y_1 - A^+AY_1(A^*A)(A^*A)^+ \|^2 + \\ & 2\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[Y_1 - A^+AY_1(A^*A)(A^*A)^+]A^+B(AA^*)^+A\}\end{aligned} \tag{15}$$

由引理4可验证

$$\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[(Y_1 - A^+AY_1(A^*A)(A^*A)^+]A^+B(AA^*)^+A\} = 0$$

由式(15)得

$$\| X_1 \|^2 = \| A^+B(AA^*)^+A \|^2 + \| Y_1 - A^+AY_1(A^*A)(A^*A)^+ \|^2 \geqslant \| A^+B(AA^*)^+A \|^2$$

由 X_1 的任意性知定理3成立.

推论1[2]　A^+B 是式(2)的一个最小二乘解.

定义6　对于方程(1)及约束条件式(3),若有 $X_0 \in Q^{n\times n}$, 满足

(i) $DX_0 = E$

(ii) $\| AX_0A^* - B \|^2 = \min\limits_{DX=E} \| AXA^* - B \|^2$

则称 X_0 为带约束条件式(3)的方程(1)的最小二乘解.

定理4　令 $DD^+E = E$,则在约束条件式(3)下的方程(1)的最小二乘解为

$$\begin{aligned}S = \{ & D^+E + Q_D(AQ_D)^+(B - AD^+EA^*)A(A^*A)^+ + \\ & Q_DV - Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V(A^*A)(A^*A)^+ \mid V \in Q^{n\times n}\}\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $Q_D = I - D^+D$.

证明　由引理7,方程(3)有解,且其通解为

$$X = D^+E + Q_DU \tag{17}$$

其中 $U \in Q^{n\times n}$ 是任意的,于是

$$\begin{aligned}\min_{DX=E} \| AXA^* - B \|^2 & = \min_U \| A(D^+E + Q_DU)A^* - B \|^2 \\ & = \min_U \| AQ_DUA^* - (B - AD^+EA^*) \|^2\end{aligned} \tag{18}$$

由定理2

$$U = (AQ_D)^+[(B - AD^+EA^*)A(A^*A)^+] + V - (AQ_D)^+(AQ_D)V(A^*A)(A^*A)^+ \tag{19}$$

这里 $V \in Q^{n\times n}$ 是任意的,将式(19)代入方程(1)即得到式(16).

推论 2[2] 设 $DD^+E=E$,则在约束条件式(3)下的方程(2)的最小二乘解为

$$T=\{D^+E+Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+E)+Q_DZ-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)Z \mid Z\in Q^{n\times r}\}$$

定义 7 设 $X_0\in S$,且 $\|X_0\|^2=\min\limits_{X\in S}\|X\|^2$,则称 X_0为带约束条件式(3)的方程(1)的具有极小范数的最小二乘解.

定理 5 设 $DD^+E=E$,则

$$X_0=D^+E+Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+EA^*)A(A^*A)^+ \tag{20}$$

为带约束条件式(3)的方程(1)的具有极小范数的最小二乘解.

证明 对任意 $X_1\in S$ 则

$$\begin{aligned}\|X_1\|^2=&\|Q_DV_1-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V_1(A^*A)(A^*A)^+\|^2+\\&\|D^+E+Q_D(AQ_D)+(B-AD^+EA^*)A(A^*A)^+\|^2+\\&2\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}[Q_DV_1-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V_1(A^*A)(A^*A)^+]^*[D^+E+\\&Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+EA^*)A(A^*A)^+]\}\end{aligned} \tag{21}$$

其中,$V_1\in Q^{n\times n}$.由引理 4 和引理 5

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{&\mathrm{tr}[Q_DV_1-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V_1(A^*A)(A^*A)^+]^*[D^+E+\\&Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+EA^*)A(A^*A)^+]\}=0\end{aligned}$$

则 $$\|X_1\|^2\geqslant\|D^+E+Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+EA^*)A(A^*A)^+\|^2=\|X_0\|^2$$

于是,由 X_0 的任意性知定理成立.

推论 3[2] 设 $DD^+E=E$,则

$$X_0=D^+E+Q_D(AQ_D)^+(B-AD^+E)$$

为带约束条件式(3)的方程(2)的具有极小范数的最小二乘解.

相似地,我们可以考虑方程

$$AXB=C \tag{22}$$

同理,我们有关于方程(22)的类似于定理 1 至定理 5 的结果.

参考文献:

[1] XUE You-cai, WANG Qing-wen. Minor self-conjugate solutions of Linear Matrix Equations over a skew field[J]. Banyan Math. J. 1997,(4):21-30.
[2] XUE You-cai. The least square solutions to the quaternion matrix equation $AX=B$[J]. Journal of Maths. 1997,17(1):87-90.
[3] ZHUANG Wa-jin. Generalized inverses of matries over a skew field[J]. J. of Maths. (PRC),1986,6(1):105-112.
[4] ZHANG Shu-qing. Some properties of generalized over the p-division ring[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),1992,18(3):33-36.
[5] ZHANG Shu-qing. Some theorems of traces of quaternion matrices[J]. J. of Math. Res. and Exp., 1993,13(4):567-572.

The least square solution to the quaternion matrix equation $AXA^*=B$

XUE You-cai
(Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: This paper gives the definition and the expressions of norm of a least square solution to the quaternion matrix equation $AXA^*=B$ and the equation with the constraint condition $DX=E$, either.

Key words: the quaternion field; matrix equation; the least square solution; the least norm solution