浙江科技学院学报,第14卷第4期,2002年12月
Zhejiang University of Science and Technology
Vol.14 No.4, Dec. 2002

奇异函数建立梁挠曲线初参数方程的方法

王吉民
(浙江科技学院 土木工程学系,浙江 杭州 310012)

摘　要：介绍了奇异函数的特点,通过奇异函数给出了作用在梁上常见的几种外荷载的线分布集度的表达式,建立了梁的挠曲线的初参数方程,最后介绍了该方法的应用分析实例.

关键词：奇异函数；挠曲线；初参数方程
中图分类号：TU311　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2002)04-0033-04

在材料力学中,梁弯曲时挠曲线方程的求解中可采用初参数方程.这是一种适宜于计算机计算梁弯曲位移的方法,该方法不论荷载如何复杂,梁的挠曲线方程都能用一个统一的方程来表达[1].

梁挠曲线和转角的初参数方程分别为：

$$EIv = -\int\iiint q(x)\mathrm{d}x^4 - \frac{Q_0}{6}x^3 - \frac{M_0}{2}x^2 + EI\theta_0 x + EIv_0 \tag{1}$$

$$EI\theta = -\iiint q(x)\mathrm{d}x^3 - \frac{Q_0}{2}x^2 - M_0 x + EI\theta_0 \tag{2}$$

式中,v、θ分别为梁的挠度和转角;$q(x)$为荷载集度;EI为梁的抗弯刚度;Q_0、M_0、θ_0和v_0分别为坐标原点处横截面上的剪力、弯矩、转角和挠度,它们称为初参数.

当简支梁或悬臂梁受满布的分布荷载作用时,用式(1)和式(2)很容易通过积分运算得到梁的挠曲线方程和转角方程,其中4个初参数Q_0、M_0、θ_0和v_0可根据梁端部的位移边界条件和力边界条件直接确定.但是,当梁的支座情况不同和作用在梁上的外荷载不是满布的分布荷载时,或者梁上作用有集中力和力矩时,一般无法直接用初参数方程得到其理论解,而是需要通过编制程序进行计算,分段求解各段的挠曲线方程和转角方程[2].

当然,也可以用传统的分段积分的方法来求解梁的挠曲线方程的理论解,但其运算过程极其繁冗.若梁上因承受多种组合荷载而需要划分n段时,则需根据边界条件和连续条件求解$2n$个待定积分常数,才能获得挠度方程$v(x)$和转角方程$\theta(x)$.应用奇异函数可以克服这些缺点.不论梁上作用的外荷载如何复杂,均可用一个统一的荷载$q(x)$来描述,无需分段建立弯矩方程.对方程(1)进行积分后,根据2个力边界条件和2个位移边界条件即可确定4个初参数Q_0、M_0、θ_0和v_0,从而得到梁的挠曲线方程,使得运算大为简化.同时,全梁只用1个$v(x)$和$\theta(x)$来表述挠度方程和转角方程,这就使问题的解答非常简洁和直观.因此,奇异函数建立梁挠曲线的初参数方程是一种行之

收稿日期：2002-05-10

作者简介：王吉民(1961-),男,浙江杭州人,浙江科技学院土木工程学系高级工程师,工学博士,从事结构工程领域的研究.

有效的方法.

1 奇异函数的特点

奇异函数指函数及其微分函数和单位阶跃函数及其积分函数所组成的函数族,用麦考利(W. H. Macauley)括号⟨⟩定义式为:

$$\left.\begin{aligned} &当\ n \geqslant 时,\langle x - x_i\rangle^n = \begin{cases}(x - x_i)^n, & x \geqslant x_i\\ 0, & x < x_i\end{cases}\\ &当\ n < 时,\langle x - x_i\rangle^n = \begin{cases}\infty, & x = x_i\\ 0, & x \neq x_i\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

微分和积分运算公式分别为:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x - x_i\rangle^n = \langle x - x_i\rangle^{n-1}, n \leqslant 0\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle x - x_i\rangle^n = n\langle x - x_i\rangle^{n-1}, n > 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{x}\langle x - x_i\rangle^n \mathrm{d}x = \langle x - x_i\rangle^{n+1}, n \leqslant 0\\ &\int_{-\infty}^{x}\langle x - x_i\rangle^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\langle x - x_i\rangle^{n+1}, n > 0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

奇异函数包含2个重要的函数,即当式(3)中的 $n = 0$ 时,就是汉著森函数(即单位阶跃函数);当 $n = -1$ 时,就是狄拉克函数(即单位脉冲函数).

2 外荷载的线分布集度的奇异函数表达式

根据奇异函数的特点,表1列出了常见的几种外荷载的线分布集度的奇异函数表达式.运用表中的线分布集度函数,可以方便地给出作用在梁上的外荷载的统一表达式,运用式(1)求出梁的挠曲线方程.

3 奇异函数法应用实例

有了表1中给出的线分布集度函数,后续的工作是如何建立结构分析的求解方程.例1以外伸梁为例,荷载形式和支座情况如图1所示.如果用传统的积分法可把梁分为三段,每段均建立一个梁的挠曲线方程,这样共有6个待定积分常数,需要用4个连续条件和2个边界条件才能确定.但如果运用奇异函数法,问题就简单多了.

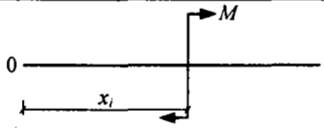
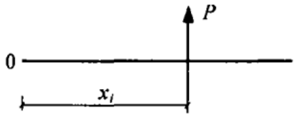
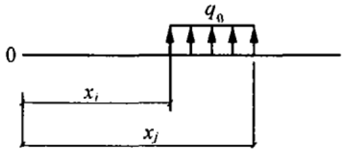
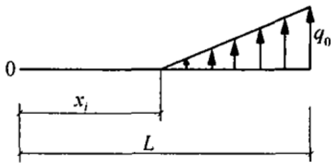
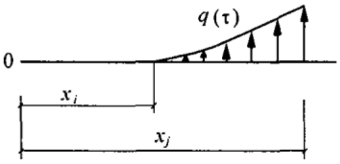
由静力平衡条件得 $R_B = 2qa, R_A = 0$.又从力边界条件可求出初参数 $Q_0 = R_A = 0, M_0 = 0$.显然,原点的零初位移 $v_0 = 0$.

本例的外荷载线分布集度的奇异函数表达式为:

$$q(x) = -q\langle x - a\rangle^0 + 2qa\langle x - 2a\rangle^{-1}$$

将这3个初参数以及 $q(x)$ 的表达式代入式(1),得出梁的挠曲线方程:

表 1　外荷载的线分布集度的奇异函数表达式

荷载类型	荷载图形	线分布集度函数
集中力偶		$q(x) = M\langle x - x_i\rangle^{-2}$
集中力		$q(x) = P\langle x - x_i\rangle^{-1}$
分段均布荷载		$q(x) = q_0(\langle x - x_i\rangle^0 - \langle x - x_j\rangle^0)$
三角形分布荷载		$q(x) = \frac{q_0}{L - x_i}\langle x - x_i\rangle^1$
任意分布荷载		$q(x) = \int_{x_i}^{x_j} q(\tau)\langle x - \tau\rangle^{-1}\mathrm{d}\tau$

$$EIv = \frac{q}{24}\langle x - a\rangle^4 - \frac{qa}{3}\langle x - 2a\rangle^3 + EI\theta_0 x$$

式中最后一个待定初参数 θ_0 可通过边界条件：$v(2a) = 0$ 而得到，即 $\theta_0 = -\frac{qa^3}{48EI}$，由此可得梁的挠曲线方程为：

$$EIv = \frac{q}{24}\langle x - a\rangle^4 - \frac{qa}{3}\langle x - 2a\rangle^3 - \frac{qa^3}{48}x$$

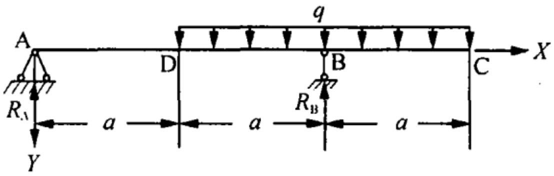


图 1　外伸梁受均布荷载作用

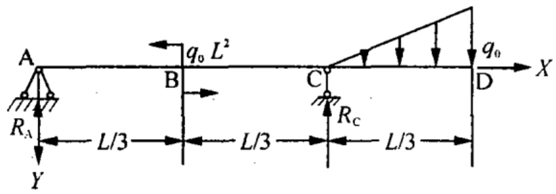


图 2　外伸梁受集中力偶和线性分布荷载作用

例 2 为外伸梁在 B 点承受力偶作用，同时在 CD 区段承受线性变化的分布荷载作用. 设 A、C 处的约束反力为 R_A、R_C，方向如图 2 所示. 由静力平衡方程

$$\sum M_A = q_0L^2 - R_C\left(\frac{2L}{3}\right) - \frac{q_0}{2}\cdot\frac{L}{3}\left(\frac{2L}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$\sum F_y = R_A - R_C - \frac{q_0}{2}\,\frac{L}{3} = 0$$

可解出支反力 $R_A = \frac{13}{9}q_0L$，$R_C = \frac{23}{18}q_0L$. 又从力边界条件可得初参数 $M_0 = 0$，$Q_0 = R_A = \frac{13}{9}q_0L$，

零初位移 $v_0 = 0$.

梁上外力(包括荷载和支座反力)的线分布集度为:

$$q(x) = -q_0L^2\langle x-\frac{L}{3}\rangle^{-2} - \frac{23}{18}q_0L\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^{-1} - \frac{3q}{L}\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^{1}$$

将这3个已知的初参数以及 $q(x)$ 的表达式代入式(1),并运用奇异函数的积分公式,得到梁的挠曲线方程:

$$EIv = q_0L^2\frac{\langle x-\frac{L}{3}\rangle^2}{2} + \frac{23}{18}q_0L\frac{\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^3}{6} + \frac{3q_0}{L}\frac{\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^5}{120} - \frac{\frac{13}{9}q_0L}{6}x^3 + EI\theta_0x$$

边界条件:在 $x = \frac{2L}{3}$ 处,$v = 0$,即

$$q_0L^2\frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2}{2} - \frac{13}{54}q_0L\left(\frac{2L}{3}\right)^3 + EI\theta_0\left(\frac{2L}{3}\right) = 0$$

由此解出 $\theta_0 = \frac{23q_0L^3}{972EI}$.

最后,整理得到此外伸梁的挠曲线方程:

$$EIv = \frac{1}{2}q_0L^2\langle x-\frac{L}{3}\rangle^2 + \frac{23}{108}q_0L\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^3 + \frac{1}{40}\frac{q_0}{L}\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^5 - \frac{13}{54}q_0Lx^3 + \frac{23}{972}q_0L^3x$$

4 结束语

与传统的分段积分和初参数方程的求解方法不同,用奇异函数法解决了集中量用连续函数形式来表示的问题,由此建立的初参数方程可用一个函数来表达,避免了分段积分所带来的繁冗的工作量,未知量个数大为减少,拓展了材料力学课程学习的新领域.

参考文献:

[1] 孙训方,方孝淑,关来泰.材料力学(上册)[M].第三版.北京:高等教育出版社,2001.
[2] 杜庆华,孙训方,贾有权.材料力学[M].北京:人民教育出版社,1963.
[3] W.A.纳什.材料力学[M].第四版.赵志岗译.北京:科学出版社,2002.

Method of establishing the deflection curve of a beam by singularity functions

WANG Ji-min
(Dept. of Civil Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: The characteristic of singularity function is introduced. Some expressions of load of line-distributed intensity are established by use of singularity function, and the initial parameter equation of deflection curve of a beam is presented. Finally, two application examples are analyzed.

Key words: singularity function; deflection curve; initial parameter equation