

纽结的号差

陶志雄

(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘 要:许多纽结不变量在 mutation 下都是不变的,文章对纽结的号差进行了讨论。通过对 Goeritz 矩阵和法欧拉数在 mutation 下的变化研究,以及应用 Gordon 和 Litherland 有关号差的公式,证明了纽结的号差具有 mutation 不变性。

关键词:号差;纽结;mutation

中图分类号: O189.24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-8798(2003)01-0001-03

如果切除三维球面 S^3 中一个三维球 P 其边界交链环 L 于 4 个点,关于 P 的适当轴旋转 π 角度后再粘回,得到新的链环 L_1 ,称 L_1 为 L 的一个 mutation;反之亦然。我们已经知道许多不变量在 mutation 下保持不变,例如 Conway 多项式, Jones 多项式, HOMFLY^[1] 多项式等。这里我们考察了纽结的号差(signature)^[2]在 mutation 下的性质,证明了定理——纽结的号差是一个 mutation 不变量。

1 准 备

对于一个未定向的曲面 F , $\partial F = K$, (K 是一个纽结), Gordon C. McA. 和 Litherland R. A. 定义 Goeritz 矩阵 $G_F(K)$ 如下^[3](以下讨论均限于整数范围)。

设 N 是 F 的一个闭的正则邻域, N 就是 F 上的一个 I-丛(bundle)的全空间,则 $\pi: \tilde{F} \rightarrow F$, 当 F 不可定向时,它是一个可定向二层覆盖,否则它是一个平凡的二层覆盖。设 $\tau: H_1(F) \rightarrow H_1(\tilde{F})$ (这里 $H_1(\cdot)$ 是 $H_1(\cdot; \mathbb{Z})$ 的简写, \mathbb{Z} 是整数集)是转移(transfer)映射,即道路提升映射。由于 F 和 \tilde{F} 是 S^3 中不交子集,可定义环绕数:

$$lk: H_1(F) \times H_1(\tilde{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

选取 $H_1(F)$ 的一个生成元系 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, 则 $G_F(K)$ 的 (i, j) 位置上的元素定义为 $lk(\alpha_i, \tau\alpha_j)$, 其中定向的一维闭链 α_i 是 α_i 的代表元(在下文中我们不再加以区别), $H_1(\tilde{F})$ 中 1-闭链 $\tau\alpha_j$ 是通过推 $2\alpha_j$ 到 F 在 S^3 中的余集 $S^3 - F$ 得到的。 $-lk(K, K')$ 称为 F 的法(normal)欧拉数,记为 $e(F)$, 这里 K' 是 F 与 K 在 S^3 中的正则邻域边界的交,它的定向平行于 K 。则有下列结果^[3]:

$$(**) \quad \sigma(K) = \text{sign}(G_F(K)) + \frac{1}{2}e(F)$$

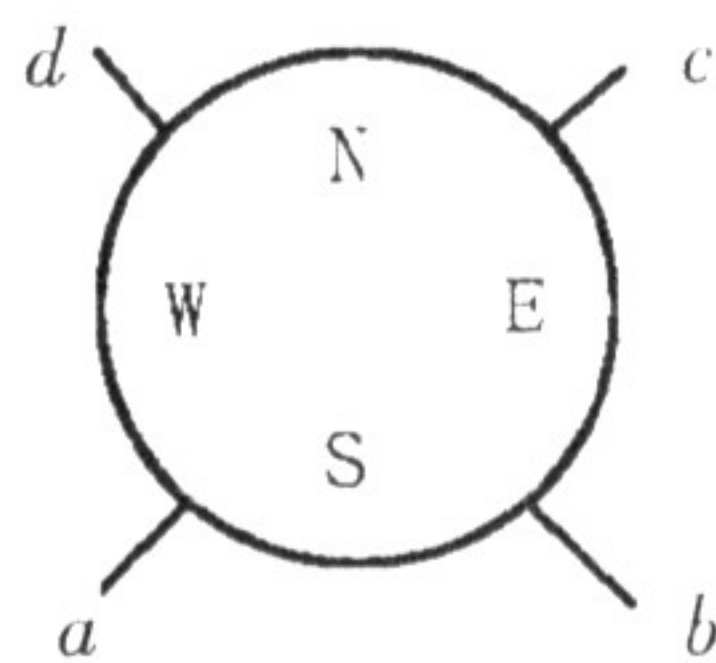
其中 $\sigma(K)$ 是 K 的号差, $\text{sign}(G_F(K))$ 是对称阵 $G_F(K)$ 的号差。注意到 Goeritz 矩阵由 $H_1(F)$ 的生成元系惟一确定。

收稿日期:2002-09-25

基金项目:浙江省教育厅科研资助项目(20010448)

作者简介:陶志雄(1961—),男,浙江绍兴人,博士,副教授,主要从事拓扑学的研究。

一个房间(room) R 是 S^3 中一个紧的三维流形,在其边界上有有限个点,每个标上了“进”或“出”; R 的一个居民(inhabitant)是一个适当地嵌在 R 中光滑的紧的一维流形,它相交于 R 的边界正好是上述之有限点集,并且它的定向与上述的“进”或“出”一致。现设 Q 是如图 1 中带有 2 个进 2 个出的房间(显然有 6 种可能的情形)。

图 1 房间 Q

定义^[1] 设 L_1 和 L_2 是 S^3 中定向的链环, 则 L_2 称为 L_1 的 mutation(或反之)。如果 L_2 从 L_1 按以下方式得到:

(i) 从 L_1 在 Q 的拷贝 Q_1 中的部分 M 移去。

(ii) 以垂直于平面的中心轴或以 $E-W$ 或以 $N-S$ 为轴, 将 M 旋转 π 角度。

这些旋转分别记为 ξ, ψ, φ , 必要的话改变所有 S 的箭头, 使其与 Q 的一个居民一致。

(iii) 放这个新的居民在 Q 中得到 L_2 。

例如 Conway 纽结在 ξ 下成为 Kinoshita-Terasaka 纽结^[1], 即它们互为对方的 mutation。显然 $\xi = \varphi\psi = \psi\varphi$ 。

2 定理的证明

如上所述, 作 mutation 的房间 Q 是二进二出的。我们将纽结图染成黑白相间, 并注意交叉处的处理, 可得 2 个曲面一黑一白, 分别记为 B 和 W , 则 Q 如图 2 所示, 沿用上面的记法, 作 ψ 。由于号差是一个纽结不变量, 它不依赖于上述 F 的选取, 我们取 F 为曲面 B 。根据同调理论, 每一块白色区域都对应一个 $H_1(F)$ 的生成元, 即在 F 上绕着这个白色区域一圈, 并且圈内不含其他白色区域, $H_1(F)$ 由这些元生成。事实上, 去掉其中的任何一个仍然是 $H_1(F)$ 生成元系(有关知识可查阅代数拓扑的相关书籍, 例如

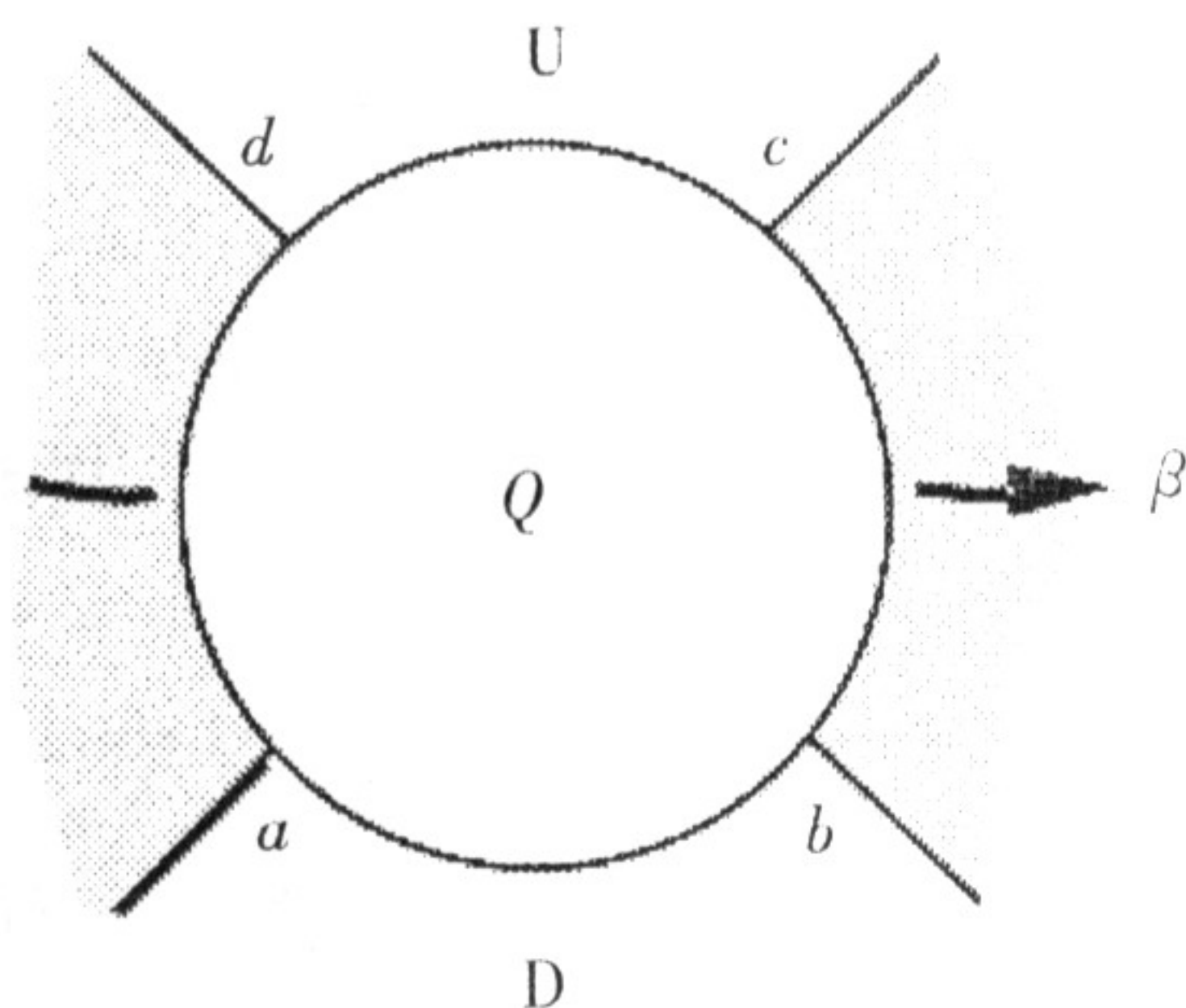
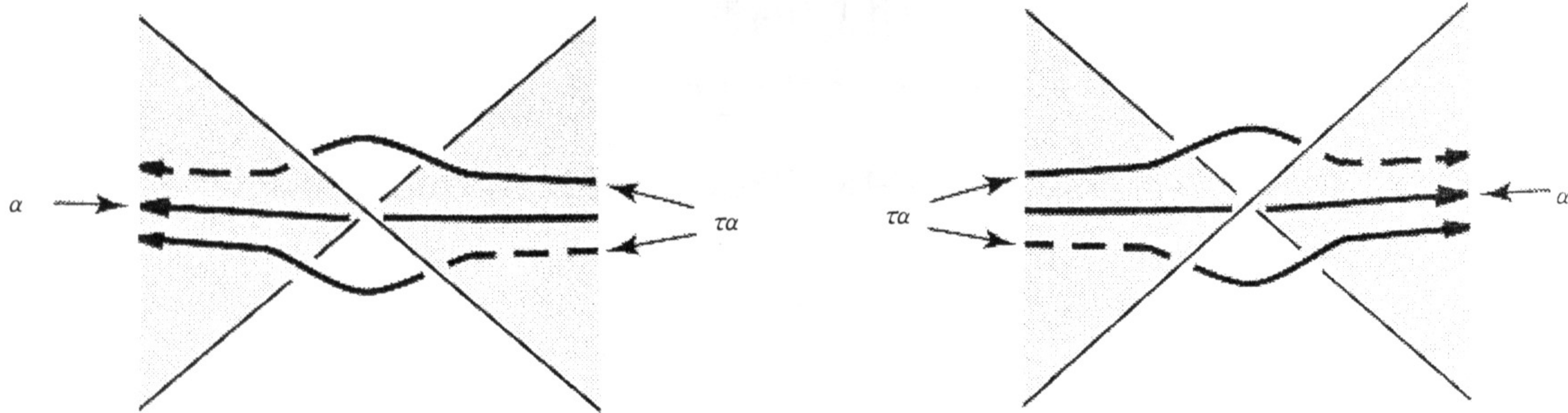
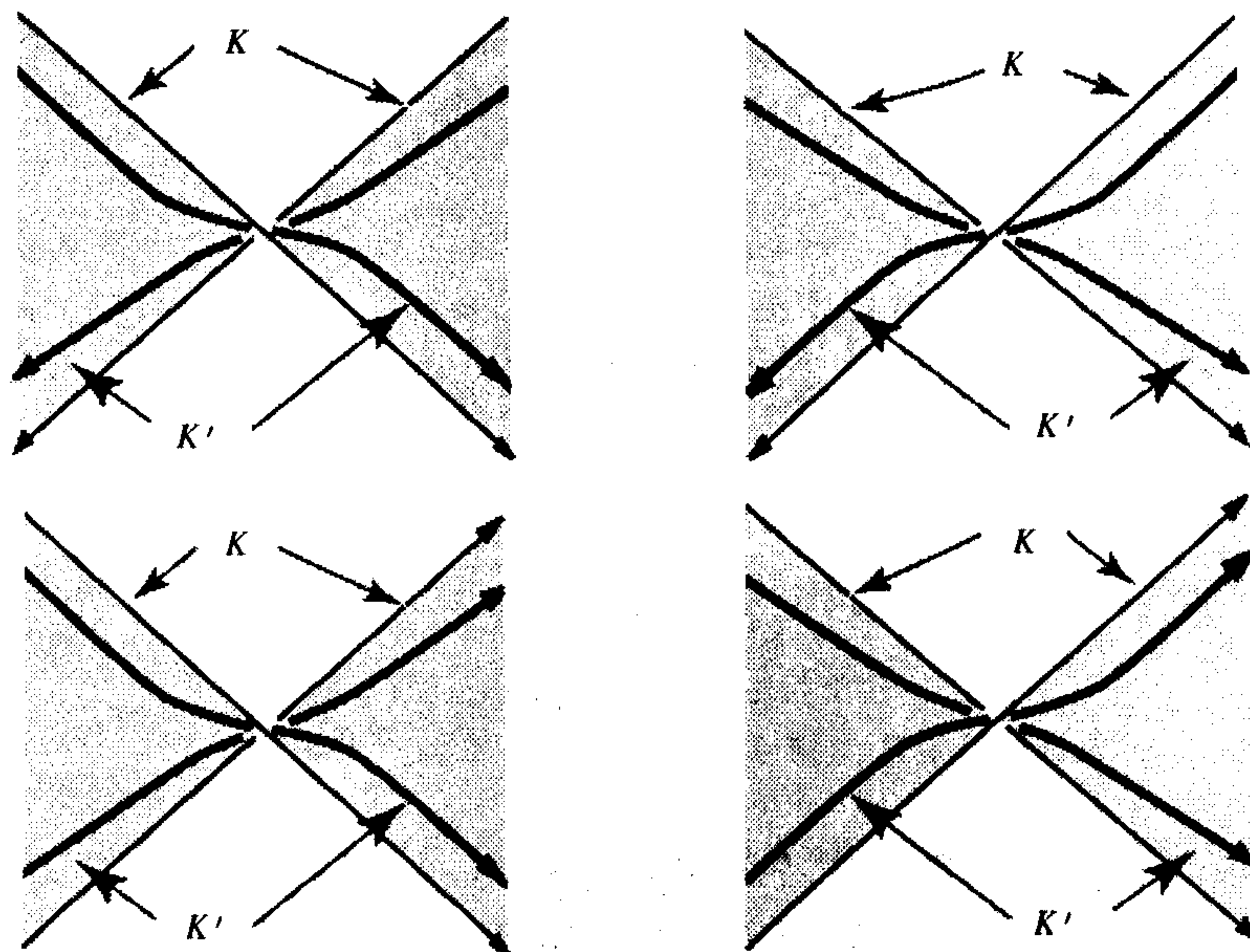


图 2 已染成黑白的纽结图

文献[4])。因此, 我们可以按如下方式选取 $H_1(F)$ 的生成元: 除了上下 2 个白色区域 U 和 D 外, 白色区域给出的 $H_1(F)$ 的生成元分别为 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$, 其中 a_1, a_2, \dots, a_n 是在 Q 内, 其他的在 Q 外。记白色区域 U 对应的生成元为 β , 所有这些生成元的定向都是逆时针的, 这样, $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, \beta \rangle = H_1(F)$ 。显然 Q 内的生成元与 Q 外的没有任何关系, 即对于任何 i, j , 有 $lk(a_i, \tau b_j) = lk(b_j, \tau a_i) = 0$ 。

作 ψ 后, 新的纽结设为 L , 新的曲面为 S , 不难知道区域像的颜色和原来一样, 又 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ 的像分别是 $\psi(a_1), \dots, \psi(a_n), b_1, \dots, b_m, \psi(\beta)$ 由以下两部分组成, Q 内是 β 的像, Q 外与 β 一致。易见 $\{\psi a_1, \dots, \psi a_n, b_1, \dots, b_m, \psi \beta\}$ 是 $H_1(S)$ 的生成元系, $\psi(a_1), \dots, \psi(a_n)$ 的方向均已改变, $\psi(\beta)$ 的方向没有改变。虽然如此, 它们的相互关系没有变, 而且由于它们所处的交叉性质(一个交叉两侧的阴影是由上面的弧段顺时针扫过得来还是逆时针扫过得来, 这个性质决定了两个生成元 x 和 y 的环绕数(linking number) $lk(x, \tau y)$ 没变(见文献[3]及图 3)。故对任意 i, j , $lk(\psi a_i, \tau(\psi a_j)) = lk(a_i, \tau a_j)$, $lk(\psi a_i, \tau(\psi \beta)) = lk(a_i, \tau \beta)$, $lk(\psi \beta, \tau(\psi a_j)) = lk(\beta, \tau a_j)$, 这说明 $G_F(K) = G_S(L)$ 。

图 3 α 的提升

图4 不同交叉处的 K 与 K'

下面考虑 $e(S)$ 。设 L' 是 S 与 L 在 S^3 中的正则邻域边界的交, 它的走向平行于 L , 即 L 和 L' 是保持同方向的。 L 在 Q 内部分总是 2 条弧段, 那些交叉可分成两类。一类是同一弧段形成的, 在 ψ 下, 交叉的符号不变, 根据图 4, 其对法欧拉数的贡献不变; 另一类是由 2 条不同的弧段形成的交叉。我们来考察其变化, 根据图 4, a 的像是 d , c 的像是 b , 2 个进, 2 个出。如果 a 与 d 表示不同的进出 (例如 a 进 d 出), 则 b 与 c 也表示不同的进出, 作 ψ 后, 进出都变了, 即 2 条弧段都必须改变方向, 这样交叉的符号没有改变, 从而对法欧拉数的贡献没有变。如果 a 与 d 表示相同的进出, 则 b 与 c 也表示相同的进出, 相似地可证此时对法欧拉数的贡献也不变。所以, $e(S) = e(F)$ 。

由公式 (**) 得知: $\sigma(K)$ 在 ψ 下不变。

同理可证, $\sigma(K)$ 在 φ 下不变。只要考虑 $F = W$, 其他证明完全相仿。因此, $\sigma(K)$ 也在 $\xi = \varphi\psi = \psi\varphi$ 下不变。这样, 我们就完成了定理的证明。

参考文献:

- [1] Lickorish W B R. A polynomial invariant of oriented links[J]. *Topology*, 1987, 26(1): 107 - 141.
- [2] Burde D, Ziechang H. *Knots*[M]. Berlin and New York: de Gruyter, 1985.
- [3] Gordon C McA, Litherland R A. On the signature of a link[J]. *Invent. Math*, 1978, 47: 53 - 69.
- [4] Greeberg M J, Harper J R. *Algebraic topology: a First Course*[M]. London and Tokyo: The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.
- [5] Rolfsen D. *Knots and links*[M]. Berkeley. CA: Publish or Perish, 1976.

The Signature of a knot

TAO Zhi-xiong

(Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: There are many knot invariants which are invariante under mutation. This paper studies the signature of a knot. By discussing the changes of the Goeritz matrices of the knot under its mutation and their normal Euler numbers, and by using the formula of the signature of a knot given by Gordon and Litherland, it proves that the signature of a knot is a mutation invariant.

Key words: signature; knot; mutation